Fundamentos de Análise Numérica - BMAC - 2013
1^a PROVA - Aos 17 de setembro de 2013

Questão 1 Determine α, β e γ que minimizem

$$\int_0^1 [x(1-x)-(a+b\cos(2\pi x)+c\sin(2\pi x))]^2dx, \ (a,b,c)\in\mathbb{R}^3.$$

Questão 2 Considere em $\mathcal{C}([a,b])$ o produto interno $< f,g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$. Com relação a esse produto interno suponha que $p_0(x),\ p_1(x),\ldots,\ p_n(x),\ \ldots$ são polinômios mônicos e ortogonais com grau de $p_n(x)$ igual a n.

(a) Prove que, para $n\geq 2$ vale a relação de recorrência

$$p_n(x)=(x-a_n)p_{n-1}(x)-b_np_{n-2}(x),$$

com $a_n=\frac{<xp_{n-1}(x),p_{n-1}(x)>}{<p_{n-1}(x),p_{n-1}(x)>}$ e $b_n=\frac{<p_{n-1}(x),p_{n-1}(x)>}{<p_{n-2}(x),p_{n-2}(x)>}$.

(b) Prove que, para todos os x e y em $[a,b]$ tem-se, se $n\geq 2$,

$$\begin{gathered}p_n(x)p_{n-1}(y)-p_n(y)p_{n-1}(x)=\\(x-y)p_{n-1}(x)p_{n-1}(y)+b_n(p_{n-1}(x)p_{n-2}(y)-p_{n-1}(y)p_{n-2}(y)).\end{gathered}$$

Questão 3 Considere em $\mathbb{R}^2$ um produto interno $<\ ,\ >$ e sua norma associada $\|\ \|_{<,>}$. Mostre que a solução do problema de achar o ponto da *circunferência* de centro na origem e raio 1 (na norma $\|\ \|_{<,>}$) *mais próximo* (na norma $\|\ \|_{<,>}$) do ponto $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ é obtida pela intercecção da circunferência dada com a semi-reta $\lambda(x_0,y_0),\ \lambda\geq 0$.
Analise a unicidade de soluções.