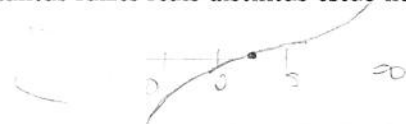
$\frac{p'q - pq'}{q^2}$

Prova de Fundamentos de Análise Numérica
29/11/2011

1. Considere o polinômio $p(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$. Determine quantas raizes reais distintas estão nos intervalos:
   (i) $[0, 2]$; $p'(x) = 3x^2 - 18x + 27$
   (ii) $[2, 5]$; $p''(x) = 6x - 18$
   (iii) $[5, \infty]$.



   Considerando a sequência gerada pelo método de Newton, diga, para cada condição inicial abaixo, se a sequência converge e como (monotonicamente crescente ou decrescente, oscilante).
   (i) $x_0 = 0$; cresc. $p'(0) > 0$ $p''(0) = -18 < 0$ $|\phi'(x)| < 1$
   (ii) $x_0 = 2$; $p'(2) > 0$ $p''(2) < 0$
   (iii) $x_0 = 5$. $p'(5) > 0$ $p''(5) > 0$

2. Dada uma função $f : [x_0, x_2] \mapsto R$ e $x_1 = (x_0 + x_2)/2$, ponto médio entre x_0 e x_1:
   (i) Escreva a expansão de Taylor de f de grau 3 (ou seja o erro tem um termo de grau 4);
   (ii) Deduza a regra de Simpson

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + k f^{(4)}(\xi);$$

   $f(\bar{x}) = 0 \to \bar{x} = \sqrt[5]{3}$

   0,5 (iii) Encontre a_0, a_1 e a_2 a partir do fato que a regra de Simpson é exata para $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3$ (com k=0).

3. Utilize o método de Newton para calcular $\sqrt[5]{3}$, para tanto determine:
   (i) A sequência do método de Newton cujo limite, se convergir, seja $\sqrt[5]{3}$; $\frac{|x_n - x|}{|x_{n-1} - x|^2} < 2$
   (ii) Determine uma condição inicial que a sequência anterior converge; $\phi(x)$
   (iii) Descreva um critério de parada **eficiente** para que a aproximação tenha $|x_n - \sqrt[5]{3}| < \epsilon$, com ϵ dado.

$p = \sqrt[5]{3} = x \Rightarrow 3 = x^5 \Rightarrow x^5 - 3 = 0 = f(x)$

$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \; \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] =$ $\frac{(x_0 - x_1)(x_4 - x_0)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_0)}$ $|x_n - x_{n-1}|$ x_0

$h = \frac{x_2 - x_0}{2} = (x_1 - x_0) = (x_2 - x_1)$ $5x^4$

Teorema de Taylor

Suponha que $f \in C^n[a, b]$, que f^{n+1} exista em $[a, b]$ e que $x_0 \in [a, b]$. Para todo $x \in [a, b]$, existe um número $\xi(x)$ entre x_0 e x tal que $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, onde

$p = \sqrt[5]{3} = x$ $\lim_{n \to \infty} |x_n - p|$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

e

$x^5 = 3$ $\lim_{x \to p} \frac{\phi(x) - \phi(p)}{x - p} = \phi'(p)$

$f(x) = x^5 - 3 = 0$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

$\phi(x) - \phi(p) = \phi'(p)(x - p)$

Teorema de Sturm

Dado um polinômio $p(x)$ de grau n e um número real α, definimos $v(\alpha)$ como sendo o número de variações de sinal em $\{g_i(\alpha)\}$ onde construimos a sequência $g_0(\alpha), g_1(\alpha), \ldots, g_n(\alpha)$, ignorando zeros, assim:

$$\begin{cases} g_0(x) = p(x) \\ g_1(x) = p'(x) \end{cases}$$

e, para $k \geq 2$, $g_k(x)$ é o resto da divisão de g_{k-2} por g_{k-1}, **com sinal trocado**.

Então, dados a, b com $a < b$, $p(a) \neq 0$ e $p(b) \neq 0$, o número de raízes distintas $p(x) = 0$ no intervalo $[a, b]$ é exatamente $v(a) - v(b)$.