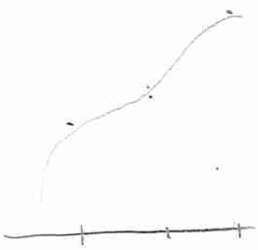
Sergio Oliva

Prova de Fundamentos de Análise Numérica
11/10/2011

1. Ao se interpolar uma função $f(x)$, a partir de uma tabela com 7 pontos igualmente espaçados e a forma de Newton com diferenças simples progressiva, observou-se que o polinômio interpolador tinha grau 2 (dois). Houve um erro no disco do computador e a tabela de diferenças simples foi danificada, recuperando-se a tabela abaixo. Complete a tabela de diferenças simples e determine o polinômio interpolador.



x_i	$f(x_i) = \Delta^0 f$	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6
0	1						
		4					
?	?		?				
		?		?			
?2	?		2		?		
		?		?		?	
3	?		?		?		?
		?		?		?	
?4	?		?		?		
		?		?			
?5	?		?				
		?					
?6	55						

$\frac{\alpha - 4}{2} = 2$

$\alpha = 4+4 = 8$

Polinômio interpolados com diferenças simples progressivas:

$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)\frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} + (x - x_0)(x - x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} + \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}$

e, se $f \in C^{n+1}([x_0, x_n])$, $\forall x \in [x_0, x_n]$, $f(x) = P_n(x) + \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)\ldots(x - x_n)$.

2. Sabe-se que uma função $y = f(x)$ tem um gráfico crescente, muito próximo do gráfico de $g(x) = ae^{bx}$, para a e b reais. Num experimento numérico, montou-se a seguinte tabela.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

x_i	$y_i = f(x_i)$	$ln(y_i)$	x_i^2	$x_i ln(y_i)$
1,00	5,10	1,629	1,0000	1,629
1,25	5,79	1,756	1,5625	2,195
1,50	6,53	1,876	2,2500	2,814

(a) Pelo Método dos Mínimos Quadrados, aproxime x para o qual $y = f(x) = 6$.

(b) Utilizando Interpolaçcão Polinomial, aproxime x para o qual $y = f(x) = 6$. Lagrange

3. Considere a função $f(x) = 3xe^x - e^{2x}$. Vamos calcular a função $f(x)$ num número finito de pontos e interpolar por um polinômio $P(x)$. Quantos pontos temos que calcular f para que possamos afirmar que o $|P(x) - f(x)| < 10^{-3}$, para todo $x \in [1; 1, 1]$?

$a = 1$, $b = 1,1$

$g(x) = a \cdot e^{bx}$

$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{n+1}(\xi)}{\ldots}\ldots$

$\ln g = \ln(a \cdot e^{bx}) = \ln a + bx$

$|f(x) - P_n(x)| = \quad < 10^{-3}$

$1 \quad y \quad x^2$

$$\begin{bmatrix} \Sigma 1 & \Sigma x \\ \Sigma x & \Sigma x^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ln a \\ b \end{bmatrix} = \begin{matrix} \Sigma \ln y \\ \Sigma x \ln y \end{matrix}$$

$3xe^x$

$f' + g'$

$3xe^x$