

MAP2310 - Métodos Numéricos em Equações Diferenciais I

1º Semestre de 2017 - Prof. Nelson Kuhl

Prova 1 - 10/05/2017

Questão 1 (2.0 pontos) Para cada problema de valor inicial abaixo, determine a solução e o intervalo onde ela está definida:

a) $\dot{x} = \frac{t+1}{2x}$, $x(0) = -\frac{1}{2}$ b) $\dot{x} = -\frac{1}{t}x + 1$, $x(1) = 1$

Questão 2 (2.0 pontos) Considere o sistema

$$\dot{x} = -y - x\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \dot{y} = x - y\sqrt{x^2 + y^2}$$

a) Verifique que

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{\cos(t + \theta_0)}{t + 1/r_0}, \frac{\sin(t + \theta_0)}{t + 1/r_0} \right)$$

é solução do sistema satisfazendo $x(0) = r_0 \cos(\theta_0)$ e $y(0) = r_0 \sin(\theta_0)$, onde $r_0 > 0$.

b) Partindo de $x(0) = 3$, $y(0) = 4$ e usando $h = 0.2$, avance um passo com o método de Heun.

Questão 3 (2.0 pontos) Determine a solução geral da equação diferencial

$$\ddot{x} - 3\dot{x} - 40x = 2e^{8t}.$$

Sugestão: procure uma solução particular na forma $x_p(t) = Ate^{8t}$.

Questão 4 (2.0 pontos) Mostre que a equação diferencial

$$\dot{x} = F(at + bx + c),$$

onde a , b e c são constantes, pode ser transformada em uma equação separada com a mudança de variável dependente $y = at + bx + c$. Apresente a equação diferencial para y nos casos

(a) $\dot{x} = (t + x)^2$, (b) $\dot{x} = \sqrt{2t + x + 3}$.

Questão 5 (2.0 pontos) Demonstre o Lema de Gronwall: Sejam u e v funções contínuas não negativas em $[a, b]$ tais que

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t v(s)u(s) ds, \quad t \in [a, b],$$

para $\alpha > 0$ constante. Então

$$u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s) ds}.$$

Sugestão: estude o comportamento de $\frac{w'(t)}{w(t)}$, onde $w(t) = \alpha + \int_a^t v(s)u(s) ds$.