MAP 2320 - Métodos Numéricos em Equações Diferenciais II
Prova 1 - 22/09/2011 - Duração: 2 horas

Questão 1 Obtenha a solução da equação

$$u_t + u_x = -u, \quad x, t > 0,$$

que satisfaz as condições

$$u(x, 0) = 0, \ x > 0, \quad u(0, t) = \frac{1}{1+t}, \ t > 0.$$

Questão 2 Considere a equação

$$u_{xy} + 3u_y = 0.$$

a) Qual é o seu tipo? $A=0 \quad B=1 \quad C=0 \Rightarrow B^2-4AC = 1>0$

b) Obtenha a solução geral (sugestão: resolva primeiro a equação para $v(x, y) = u_y(x, y)$).

Questão 3

a) Suponha que $u(x, t) \in C^\infty(R \times (0, \infty))$ é soulção da equação do calor $u_t = u_{xx}$. Mostre que $v(x, t) = u_x(x, t)$ também é solução da equação do calor.

b) Verifique que $u(x, t) = x^3 + 6xt$ é solução do problema de valor inicial $u_t = u_{xx}$, $u(x, 0) = x^3$.

c) Use os itens anteriores para obter uma solução do problema de valor inicial $u_t = u_{xx}$, $u(x, 0) = x^2$.

Questão 4 Se $u(x, t)$ satisfaz a equação da onda $u_{tt} = u_{xx}$, prove a identidade

$$u(x + h, t + k) + u(x - h, t - k) = u(x + k, t + h) + u(x - k, t - h).$$

Esboce o quadrilátero cujos vértices são os argumentos na identidade acima.

$$e^{\frac{1}{2}t} f(t) = \frac{1}{1+t} \Rightarrow f(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{1+t} \qquad \frac{e^{-\frac{1}{2}(t+x)} \cdot e^{-\frac{1}{2}(t+x)}}{1+t+x}$$

$$t=0 \Rightarrow \frac{e^{-x}}{1+x} \cdot 0 \qquad f(t+x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(t+x)}}{1+t+x} \qquad = \frac{e^{-(t+x)}}{1+t+x}$$