MAP 2320 - Métodos Numéricos em Equações Diferenciais II
Prova Sub - 01/12/2011 - Duração: 2 horas

Questão 1 Obtenha a solução, como função de x e y, do problema

$$u_x - yu_y = 2x + y, \quad u(0, s) = \sin(s).$$

subs. $u_x - s\cos s = s$ $\quad \int u_x dx = s(1+\cos s)\,dt$ $\quad -/\cos s$ $\quad \int \frac{du}{dx}$

Questão 2 Considere a equação diferencial parcial

$$u_{xx} + 6u_{xy} - 16u_{yy} = 0 \qquad (1)$$

a) Mostre que ela é hiperbólica.

b) Obtenha coordenadas ξ e η tais que, fazendo a mudança de variáveis, a equação fica na forma $v_{\xi\eta} = 0$ (lembre-se das curvas caractrísticas). Obtenha então a solução geral de (1).

c) Ache a solução $u(x, y)$ tal que $u(-x, 2x) = x$ e $u(x, 0) = \sin(2x)$.

Questão 3 Seja $u(x, t)$ a solução da equação do calor $u_t = u_{xx}$, $t > 0$, $x \in R$, com condição inicial $u(0, x) = f(x)$.

a) Mostre que $u(-x, t)$ é solução da equação do calor. Qual é a condição inicial?

b) Mostre que se f é uma função ímpar (i.e. $f(x) + f(-x) = 0$), então $u(x, t)$ é uma função ímpar em x.

c) O que se pode afirmar se f for uma função par? Justifique.

ímpar $f(x) = -f(-x)$
par $f(x) = f(-x)$
$f(-x) = -f(x)$
$f(x) = -f(-x)$

Questão 4 Seja $u(x, y)$ a solução do problema

$$\Delta u(x, y) = -1, \quad (x, y) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1)$$

com condição de contorno

$$u = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Prove que

$$0 < u(x, y) < \frac{1}{8}, \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Sugestão para uma das desigualdades:
analise a função $w(x, y) = u(x, y) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

$u(0,x) = f(x)$
fazendo $y = -x$:
$u(0,y) = f(y)$
$\Downarrow$
$u(0,-x) = f(-x)$
como $f(x) + f(-x) = 0$
$\Downarrow$
$u(0,x) + u(0,-x) = 0$
$\Downarrow$
u é ímpar em x

$u(x,t)$ é tq $u_t = u_{xx}$ $\quad u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$
$u(0,x) = f(x)$ $\quad t = x \; ; \; x = 0$.
$u(0,$ $\quad u(-x,t) = u(0,-x) = f(-x)$