MAT 111 - Cálculo Diferencial e Integral I

Bacharelado em Estatística e Bacharelado em Matemática

2^a PROVA - 16/05/2003 - Tipo A

Questão 1)(2.5) Um triângulo retângulo de vértices A, B e C, tem o cateto AC sobre o eixo Ox com $x > 0$, o vértice A sendo o ponto $(0,0)$, o vértice B no gráfico de $f(x) = xe^{-3x^2}$, com $x > 0$ e o segmento AB como hipotenusa. Girando este triângulo em torno do eixo Ox obtemos um cone. Determine as dimensões do cone assim determinado que tem maior volume.(Obs: você **não** precisa esboçar o gráfico de f para resolver o exercício.)

Questão 2) Calcule, caso exista:

(1.0) a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{ln(cos(x^5))}{x^{22}}$ (1.0) b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + arctg(2x))^{1/sen\, x}$

Questão 3) Seja $f(x) = \dfrac{2x^2}{(x+4)^2}$. Sabemos que

$$f'(x) = \frac{16x^2 + 64x}{(x+4)^4} \qquad \text{e} \qquad f''(x) = \frac{16(x+4)^2(-2x+4)}{(x+4)^6}.$$

(0.5) a) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f e os os intervalos no qual f tem concavidade para cima e concavidade para baixo.

(1.5) b) Esboce o gráfico de f, calculando todos os limites necessários.

(1.0) c) Seja $h(x) = e^{f(x)}$. Existe ponto de máximo global de h em $[-3, +\infty[$? Existe ponto de máximo global de h em $[-1, +\infty[$? Em caso afirmativo determine o ponto de máximo e o valor máximo.

Questão 4) (2.5) Sejam $f(x) = \dfrac{7x^3 - 1}{x^2 + 1}$ para $x > 0$, g a função inversa de f e h a função definida por

$$h(x) = [g(3 + sen(2x))]^4.$$

$y - h(0) = \frac{-1}{h'(0)}(x - 0)$

Admitindo que a função g é derivável, determine a reta normal ao gráfico de h no ponto $(0, h(0)$.

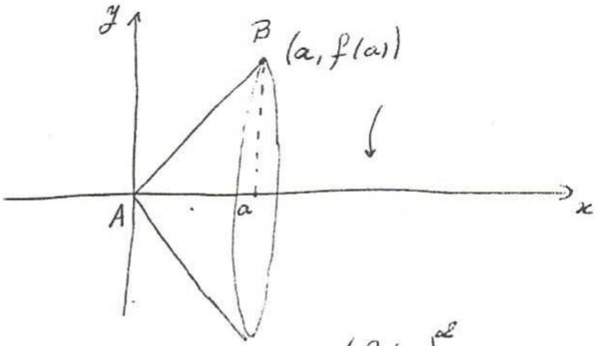
$h(0) =$

$h(0) = [g(3 + sen(20))]^4$ $\to h(0) = (g(3))^4$

$h'(x) = 4[g(3 + sen\,2x)^3] \cdot g'(3 + sen\,2x) \cdot cos\,2x \cdot 2$

Questão 1 – A

$f(x) = x e^{-3x^2}, \quad x > 0$



altura do cone = a

raio da base = $f(a)$

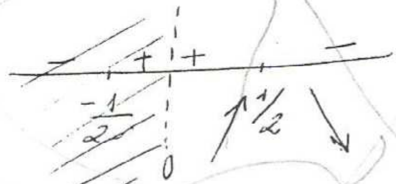
Volume = $\frac{1}{3} \pi (f(a))^2 . a \quad , a > 0$

$V(a) = \frac{\pi}{3} a \left[a e^{-3a^2} \right]^2 = \frac{\pi a}{3} \left(a^2 e^{-6a^2} \right) = \frac{\pi}{3} \left(a^3 e^{-6a^2} \right), \ a > 0$

$V'(a) = \frac{\pi}{3} \left(3a^2 e^{-6a^2} + a^3 e^{-6a^2} (-12a) \right)$

$V'(a) = \frac{\pi}{\cancel{3}} \cancel{3} a^2 e^{-6a^2} \left(1 - 4a^2 \right) = \underbrace{\pi a^2 e^{-6a^2}}_{>0} (1 - 4a^2)$

sinal de V' = sinal de $1 - 4a^2$:



Então $a = \frac{1}{2}$ é ponto de máximo global de V

Resposta: altura do cone = $\frac{1}{2}$

raio da base = $\frac{1}{2} e^{-3/4} = \frac{1}{2 \sqrt[4]{e^3}}$

Questão 2- A

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x^5))}{x^{22}}$$

Sejam $f(x) = \ln(\cos(x^5))$ e $g(x) = x^{22}$. Então

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x^5)}(-\operatorname{sen}(x^5))\, 5x^4}{22x^{21}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(x^5)\, 5}{\cos(x^5)\, 22\, x^{17}} = \lim_{x\to 0} \left(\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^5)}{x^5}}_{\to 1} \cdot \frac{5}{22} \cdot \underbrace{\left(\frac{-1}{\cos(x^5)}\right)}_{\to -1} \underbrace{\frac{1}{x^{12}}}_{\to +\infty} \right) = -\infty$$

obs: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^5)}{x^5} \underset{u = x^5}{=} \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$

Como $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe temos, pela Regra de L'Hospital que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x^5))}{x^{22}} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 0} (1 + \operatorname{arctg}(2x))^{1/\operatorname{sen} x}$$

$$(1+\operatorname{arctg}(2x)) = e^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}\ln(1+\operatorname{arctg}(2x))}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{arctg}(2x))}{\operatorname{sen} x}$$

Sejam $f(x) = \ln(1+\operatorname{arctg}(2x))$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$. Então

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\operatorname{arctg}(2x)} \cdot \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2}{\cos x} = 2$$

Como $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe temos, pela Regra de L'Hospital que $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$,

e como exp é uma função contínua concluímos que

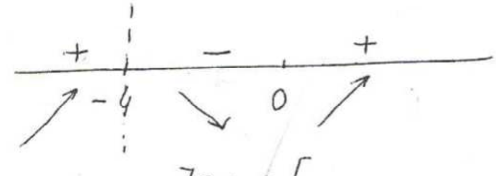
$$\lim_{x\to 0} (1+\operatorname{arctg}(2x))^{1/\operatorname{sen} x} = e^2.$$

Questão 3- A

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+4)^2} \qquad f'(x) = \frac{16x^2+64x}{(x+4)^4} \qquad f''(x) = \frac{16(x+4)^2(-2x+4)}{(x+4)^6}$$

a) $f'(x) = \dfrac{16(x^2+4x)}{(x+4)^4} = \underbrace{\dfrac{16}{(x+4)^4}}_{>0}(x^2+4x)$

sinal de f' = sinal de x^2+4x:

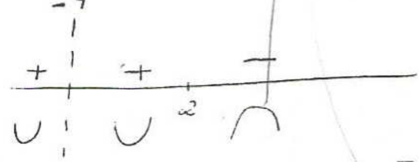


f é estritamente crescente em $]-\infty,-4[$ e em $]0,+\infty[$

f é estritamente decrescente em $]-4,0[$

$f''(x) = \underbrace{\dfrac{16(x+4)^2}{(x+4)^6}}_{>0}(-2x+4)$

sinal de f'' = sinal de $-2x+4$:

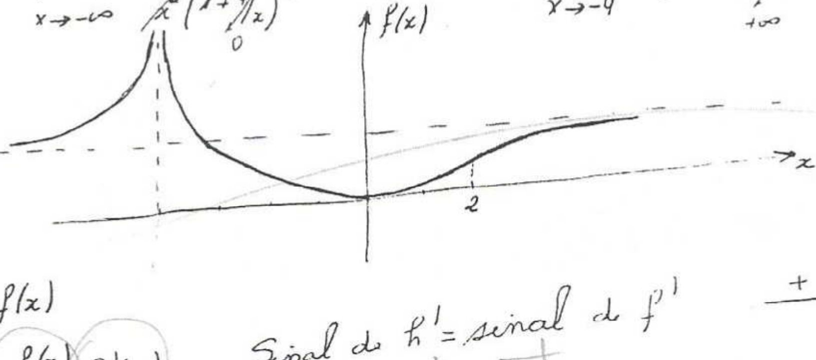


f tem concavidade para cima em $]-\infty,-4[$ e em $]-4,2[$

f tem concavidade para baixo em $]2,+\infty[$

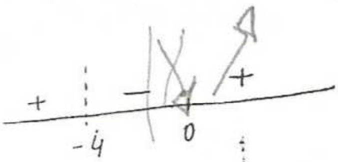
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(1+\underset{0}{\dfrac{4}{x}}\right)^2} = 2$ $\qquad \lim\limits_{x\to-4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-4^+} \underset{32}{2x^2}\cdot\dfrac{1}{\underset{+\infty}{(x+4)^2}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+\underset{0}{4/x})^2} = 2$ $\qquad \lim\limits_{x\to-4^-} \underset{32}{2x^2}\,\dfrac{1}{\underset{+\infty}{(x+4)^2}} = +\infty$

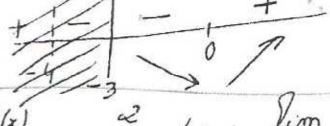


b) $h(x) = e^{f(x)}$

$h'(x) = \underbrace{e^{f(x)}}_{>0} f'(x)$ $\qquad$ Sinal de h' = sinal de f'

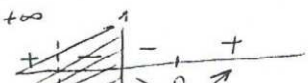


Em $[-3,+\infty[$ temos



Como $h(-3) = e^{18} > \lim\limits_{x\to+\infty} e^{f(x)} = e^2$ (pois $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$) temos que -3 é ponto de máximo global de h em $[-3,+\infty[$ e e^{18} é o valor máximo

Em $[-1,+\infty[$ temos



Como $h(-1) = e^{2/9} < \lim\limits_{x\to+\infty} e^{f(x)}$ temos que não existe ponto de máximo global.

Questão 4-A

Sejam

$$f(x) = \frac{7x^3-1}{x^2+1} \quad , x > 0 ,$$

g a função inversa de f e h a função definida por

$$h(x) = [g(3+\operatorname{sen}(2x))]^4.$$

Determine a reta normal ao gráfico de h no ponto $(0, h(0))$.

r: reta normal ao gráfico de h no ponto $(0, h(0))$

$$r: \quad y - h(0) = \frac{-1}{h'(0)}(x-0)$$

$h(0) = g(3)$

$h'(x) = 4(g(3+\operatorname{sen}(2x)))^3 \, g'(3+\operatorname{sen}(2x)) \cos(2x) \cdot 2$

$h'(0) = 4(g(3))^3 g'(3)\, 2 = 8(g(3))^3 g'(3)$

Notemos que $f(1) = \frac{6}{2} = 3$, e como g é a inversa de f temos que

$g(3) = 1$.

Então $h(0) = g(3) = 1$ e $h'(0) = 8(g(3))^3 g'(3) = 8g'(3)$.

Como $f(g(x)) = x$ temos que $f'(g(x))g'(x) = 1$, e assim $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$.

Então $g'(3) = \dfrac{1}{f'(g(3))} = \dfrac{1}{f'(1)}$.

$$f'(x) = \frac{21x^2(x^2+1) - (7x^3-1)2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{21 \cdot 2 - 12}{4} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

Portanto $g'(3) = \frac{2}{15}$ e $h'(0) = 8 \cdot \frac{2}{15} = \frac{16}{15}$

$$\boxed{r: \quad y - 1 = -\frac{15}{16}(x-0)}$$