MAT 111 - Cálculo I
P1 - 12 de Abril de 2010
Turma: Computação - Professor: Gláucio Terra

Nome:______________________________________	Nota:
No. USP:__________________RG:__________________	
Assinatura:____________________________________	

Justifique todas as suas respostas. Boa prova!

QUESTÃO **1.** (3 ptos.) *Calcule:*

(a) $\lim_{x\to+\infty} [\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}]$

(b) $\lim_{x\to 5} \left[(x^2-25)\cos(\dfrac{4x^3-2x+5}{x^2-25}) + \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-25)}{x-5}\right]$

(c) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, *onde* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é tal que:*

$$\frac{4x-1}{x} < f(x) < \frac{4x^2+3x}{x^2},$$

para todo $x > 5$.

RESPOSTA:

(a) $\forall x > 0$: $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1}$.

Como $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, segue $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1 = 2$. Portanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1} = \frac{1}{2}.$$

(b) $\lim_{x\to 5} \left[(x^2-25)\cos\left(\dfrac{4x^3-2x+5}{x^2-25}\right) + \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-25)}{x-5}\right]$.

Observe que $-1 \le \cos\left(\dfrac{4x^3-2x+5}{x^2-25}\right) \le 1$ e $\lim_{x\to 5}(x^2-25) = 0$. Sabemos que o produto de uma função limitada por uma que vai a zero também vai a zero, donde:

$$\lim_{x\to 5}(x^2-25)\cos\left(\frac{4x^3-2x+5}{x^2-25}\right) = 0$$

Agora,

$$\lim_{x\to 5} \frac{\operatorname{sen}(x^2-25)}{x-5} = \lim_{x\to 5}(x+5)\frac{\operatorname{sen}(x^2-25)}{x^2-25} (A)$$

O limite $\lim_{x\to 5} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-25)}{x^2-25}$ é o *limite fundamental* e tende a 1. Como $\lim_{x\to 5}(x+5) = 10$, temos que o limite em (A) vale 10.

(c) Para todo $x > 5$:

(i) $\frac{4x-1}{x} = 4 - \frac{1}{x}$, portanto $\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(4 - \frac{1}{x}\right) = 4$;

(ii) $\frac{4x^2+3x}{x^2} = \frac{x^2(4+3/x)}{x^2} = 4 + \frac{3}{x}$, portanto $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x^2+3x}{x^2} = 4$.

Então segue do teorema do confronto e dos dois ítens anteriores que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$.

QUESTÃO **2.** (2 ptos.)

(a) *Sejam $L \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \textit{se } x \neq 1; \\ L & \textit{se } x = 1. \end{cases}$$

Encontre (caso exista) L para que f seja uma função contínua.

(b) *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \textit{se } x \neq 0; \\ 0 & \textit{se } x = 0. \end{cases}$$

Determine se f é derivável em $x = 0$.

RESPOSTA:

(a) A função dada é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pois coincide neste conjunto com a função racional $x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$ (e toda função racional é contínua). Então, para que f seja contínua, basta que seja contínua em $x_0 = 0$. Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$, f será contínua se, e somente se, $f(0) = 2$, i.e. $L = 2$.

(b) Para todo $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tem-se:

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \sin \frac{1}{h}}{h} = h \sin \frac{1}{h}\,.$$

Como $\lim\limits_{h\to 0} h = 0$ e a função seno é limitada, segue $\lim\limits_{h\to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$, i.e. existe $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ e $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$. Ou seja, f é derivável em 0 e $f'(0) = 0$.

QUESTÃO **3.** (1 pto.) *Ache a equação das retas que passam pelo ponto $(2, -3)$ e são tangentes à parábola $y = x^2 + x$.*

RESPOSTA: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + x$. Temos, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x + 1$. Assim, dado $a \in \mathbb{R}$, a reta r_a tangente ao gráfico de f (i.e. tangente à parábola de equação $y = x^2 + x$) no ponto $\big(a, f(a)\big)$ é a reta de equação $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, i.e. $y - (a^2 + a) = (2a + 1)(x - a)$. O ponto $(2, -3)$ pertence à reta r_a se, e somente se $-3 - (a^2 + a) = (2a + 1)(2 - a) \Leftrightarrow a^2 - 4a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = 5$ ou $a = -1$. Assim, as retas pedidas são as retas de equação $y - (a^2 + a) = (2a + 1)(x - a)$ com $a = 5$ ou $a = -1$.

QUESTÃO **4.** (2 ptos.) *Calcule f' e f'', sendo $f(x) = \operatorname{tg}(\cos x)$.*

RESPOSTA: Para todo $x \in \operatorname{dom} f$, tem-se:

(i) Pela regra da cadeia, $f'(x) = \sec^2(\cos x) \cdot (-\sin x)$.

(ii) Derivando f', temos, pela regra de Leibniz (e usando a regra da cadeia para derivar o primeiro fator):

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\sec(\cos x) \cdot \sec(\cos x) \cdot \operatorname{tg}(\cos x) \cdot (-\sin x) \cdot (-\sin x) + \\ &\quad + \sec^2(\cos x) \cdot (-\cos x) = \\ &= 2\sec^2(\cos x) \cdot \operatorname{tg}(\cos x) \cdot \sin^2 x - \sec^2(\cos x) \cos x. \end{aligned}$$

Questão **5.** (2 ptos.) *Uma partícula está se movendo ao longo da curva* $y = \sqrt{x}$. *Quando a partícula passa pelo ponto* $(4, 2)$*, sua coordenada* x *cresce a uma taxa de 3 cm/s. Quão rápido está variando a distância da partícula à origem neste instante?*

Resposta: Suponha que a coordenada x da partícula seja dada por uma função derivável $x = x(t)$, onde t representa o tempo. Como a partícula se move ao longo da curva $y = \sqrt{x}$, para cada instante $t \in \operatorname{dom} x$ a posição $P(t)$ da partícula será $\big(x(t), \sqrt{x(t)}\big)$. Assim, a distância da partícula à origem, para cada $t \in \operatorname{dom} x$, será dada por $d(t) = \sqrt{x(t)^2 + x(t)}$. Seja $t_0 \in \operatorname{dom} x$ o instante em que a partícula passa pelo ponto $(4, 2)$. Pede-se para calcular $d'(t_0)$, dado que $x'(t_0) = 3$. Mas, para todo $t \in \operatorname{dom} x$, tem-se, pela regra da cadeia:

$$d'(t) = \frac{2x(t)x'(t) + x'(t)}{2\sqrt{x(t)^2 + x(t)}}\,.$$

Portanto, para $t = t_0$, temos $d'(t_0) = \frac{2x(t_0)x'(t_0)+x'(t_0)}{2\sqrt{x(t_0)^2+x(t_0)}}$; substituindo $x(t_0) = 4$ e $x'(t_0) = 3$, obtemos $d'(t_0) = \frac{27}{2\sqrt{20}}$.