QUESTÃO **1.** (3 ptos.)

(a) *Mostre que* $f(x) = (1+x)^{1/x}$ *é estritamente decrescente para* $x > 0$ *e conclua que* $(1+\pi)^e < (1+e)^\pi$.

(b) *Mostre que a equação* $3x - 2 + \cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$ *tem exatamente uma raiz real.*

(a)(i) $f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável

$$x \longmapsto (1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right)$$

$$f' : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto (1+x)^{1/x} \cdot \left[-\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \frac{1}{x(1+x)}\right] =$$

$$= (1+x)^{1/x} \cdot \left[\frac{-(1+x)\ln(1+x) + x}{\underset{>0 \text{ em } (0,+\infty)}{\boxed{x^2(1+x)}}}\right]$$

Seja $g : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Então g é derivável

$$x \longmapsto -(1+x)\ln(1+x) + x$$

e $g' [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto -\ln(1+x) - 1 + 1 = -\ln(1+x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore\ g' < 0 \text{ em } (0,+\infty) \\ g : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \text{ contínua} \end{array}\right\} \overset{\text{TVM}}{\Longrightarrow} g \text{ estritamente decrescente}$$

Como $g(0) = 0$, segue-se $g < 0$ em $(0,+\infty)$

Assim, $f' < 0$ em $(0,+\infty)$, donde, pelo TVM, f é estritamente decrescente em $(0,+\infty)$.

(ii) $(1+\pi)^e < (1+e)^\pi \iff (1+\pi)^{e/e\pi} < (1+e)^{\pi/e\pi} \iff f(\pi) < f(e)$

Como $e < 3 < \pi$, segue-se de (i) que $f(\pi) < f(e)$. #

(b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto 3x - 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto 3 - \underbrace{\frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}_{< \frac{\pi}{2} < 3}$$

$\therefore f' > 0$ em $\mathbb{R}$

Portanto, pelo TVM, f é estritamente crescente, logo injetiva.

Além disso, dado $c \in \mathbb{R}$:

(i) $\exists\, x_1 \in \mathbb{R} \;/\; f(x_1) > c$ (pois $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$)

(ii) $\exists\, x_0 \in \mathbb{R},\ x_0 < x_1 \;/\; f(x_0) < c$ (pois $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$)

Como f é contínua em $\mathbb{R}$ e $f(x_0) < c < f(x_1)$, pelo teorema do valor intermediário conclui-se que $\exists\, \bar{x} \in \,]x_0, x_1[\; / \; f(\bar{x}) = c$. Como c foi tomado de forma arbitrária, conclui-se que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$

$\therefore f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma bijeção. Em particular, existe um único $x \in \mathbb{R} \;/\; f(x) = 0$. #

QUESTÃO 2. (2 ptos.) *Calcule, caso exista:*

(a) $\lim_{x\to 0^+} x^p \ln x,\ p>0$

(b) $\lim_{x\to 0} (1+\operatorname{sen} 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

(a) $\forall x>0$:

$$x^p \ln x = \frac{\ln x}{x^{-p}}$$

Pondo $f:(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \ln x$, $g:(0,+\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^{-p}$

tem-se : (i) f e g são deriváveis,

(ii) $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$

(iii) $f':(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\longmapsto \frac{1}{x}$, $g':(0,+\infty)\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto -p\,x^{-p-1}$

$$\therefore \frac{f'(x)}{g'(x)} = -\frac{1}{p}\,x^{p+1-1} = -\frac{1}{p}\cdot x^p$$

e, como $p>0$, tem-se $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$.

Da regra de l'Hôpital se conclui que

$$\lim_{x\to 0} x^p \ln x = \boxed{0}. \ \#$$

(b) $(1+\operatorname{sen} 2x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \exp\left[\frac{1}{\operatorname{sen} x}\ln(1+\operatorname{sen} 2x)\right]$, $x\in \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\setminus$

Sejam $f: \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ e

$x \longmapsto \ln(1+\operatorname{sen} 2x)$

$g = \operatorname{sen} : \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

(i) f e g deriváveis

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0} g(x)$

$$f' : \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad g' : \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{2\cos 2x}{1 + \operatorname{sen} 2x} \qquad\qquad x \longmapsto \cos x$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2$$

Da regra de l'Hôpital conclui-se que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2 \quad , \text{ i.e. } \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 2x)}{\operatorname{sen} x} = 2$$

Como exp é contínua, segue-se:

$$\lim_{x \to 0} \exp\left[\frac{\ln(1 + \operatorname{sen} 2x)}{\operatorname{sen} x}\right] = \boxed{e^2} \quad \#$$

QUESTÃO **3.** (3 ptos.)

(a) *Esboce o gráfico de* $f(x) = x^2e^{-x}$, *determinando explicitamente: os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente, os intervalos nos quais a função tem concavidade para cima ou para baixo e os limites em* $\pm\infty$, *caso existam.*

(b) *Determine, em função de* k, *o número de soluções da equação* $ke^x = x^2$.

(i) $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ $\therefore$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 \,\}\, g(x)}{e^x \,\}\, h(x)}$

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty = \lim_{x\to+\infty} e^x$

$g'(x) = 2x$

$h'(x) = e^x$

$\therefore \lim_{x\to+\infty} g'(x) = +\infty = \lim_{x\to+\infty} e^x$

$g''(x) = 2$

$h''(x) = e^x$

$\therefore \lim_{x\to+\infty} \dfrac{g''(x)}{h''(x)} = 0$; aplicando-se a regra de l'Hôpital duas vezes, conclui-se que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

(ii) $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = \overset{>0}{\widetilde{e^{-x}}}(2x - x^2)$

Sinal de f' : $\begin{array}{ccccc} - & & + & & - \\ \hline & 0 & & 2 & \end{array}$

$\therefore$ f é $\begin{cases} \text{estritamente decrescente em } (-\infty, 0] \text{ e } [2, +\infty) \\ \quad\text{"} \qquad\quad \text{crescente} \quad \text{"} \ [0, 2] \end{cases}$

$$x \longmapsto 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x} =$$

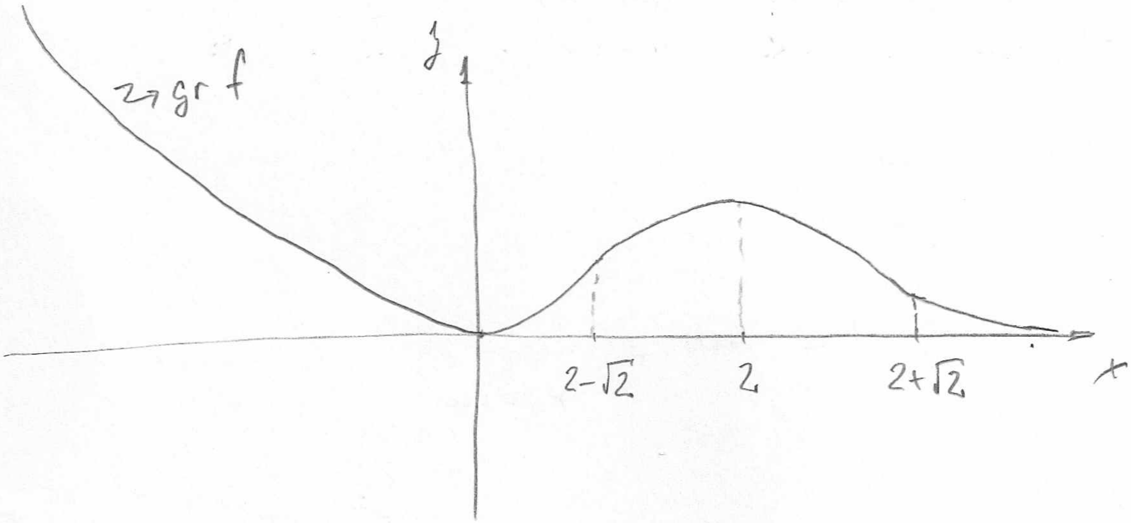
$$= e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$$

Sinal de f'' : $\quad + \quad - \quad +$

$\quad 2-\sqrt{2} \quad\quad 2+\sqrt{2}$

$\therefore$ f tem concavidade p/ cima em $(-\infty, 2-\sqrt{2}]$, $[2+\sqrt{2}, +\infty$

" " " baixo em $[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$.



(iii) $Ke^{x} = x^2 \Leftrightarrow x^2e^{-x} = K \Leftrightarrow f(x) = K$

A partir dos itens (i) e (ii) e do teorema do valor intermediário, conclui-se qe a equação:

1.) não tem solução se $K < 0$

2.) tem 1 solução se $K = 0$ ou $K > f(2) = 4e^{-2}$

3.) tem 2 soluções se $K = f(2) = 4e^{-2}$

4.) tem 3 soluções se $0 < K < f(2) = 4e^{-2}$

#

QUESTÃO 4. (2 ptos.) *Encontre, caso existam, os pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ em que a soma das distâncias a (2,0) e (-2,0) é mínima e os pontos em que a referida soma é máxima.*

Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, a soma das distâncias de (x,y) a $(2,0)$ e a $(-2,0)$ é:

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} + \sqrt{(x+2)^2 + y^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 4}$$

Para (x,y) na circ. $x^2 + y^2 = 25$, tem-se $-5 \leq x \leq 5$ e $d = \sqrt{29 - 4x} + \sqrt{29 + 4x}$.

Assim, o problema se reduz a encontrar, caso existam, o(s) pto.(s) de máximo e mínimo da função

$$f : [-5, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \sqrt{29 - 4x} + \sqrt{29 + 4x}$$

Como f é contínua, o teorema de Weierstrass assegura a existência de tais pontos. Além disso, f é derivável e:

$$f' : [-5, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{-4}{2\sqrt{29 - 4x}} + \frac{4}{2\sqrt{29 + 4x}} = \frac{-2\sqrt{29+4x} + 2\sqrt{29-4x}}{\sqrt{29-4x}\sqrt{29+4x}}$$

$\therefore f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{29 + 4x} = \sqrt{29 - 4x} \Leftrightarrow x = 0.$

Pelo teorema de Fermat, se os ptos. de máx./mín. de f não forem extremos do intervalo $[-5,5]$, devem ser ptos. críticos de f em $]-5,5[$. Assim, conclui-se que os ptos. de máximo e de mínimo de f estão no conjunto $\{-5,0,5\}$.

Como $\begin{cases} f(5) = f(-5) = \sqrt{9} + \sqrt{49} = 10 = \sqrt{100} \\ f(0) = 2\sqrt{29} = \sqrt{116} > \sqrt{100} = f(\pm 5) \end{cases}$

segue-se que $\begin{cases} 0 \text{ é pto. de máximo de } f \\ \pm 5 \text{ são ptos. de mínimo de } f \end{cases}$