MAT 111 - Cálculo I
REC - 26 de julho de 2010
Turma: Computação - Professor: Gláucio Terra

Nome:____________________________________	Nota:
No. USP:________________ RG:________________	
Assinatura:________________________________	

Justifique todas as suas respostas. Boa prova!

Questão **1.** (1,5 pontos)

(a) *Escreva as definições de "função contínua" e de "função derivável".*

(b) *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & se\ x \neq 0; \\ 0 & se\ x = 0. \end{cases}$$

Determine (i) *o conjunto dos pontos onde* f *é contínua e* (ii) *o conjunto dos pontos onde* f *é derivável.*

Questão **2.** (1 ponto) *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = (x^2 + 1)^x$. *Encontre a derivada de* f.

Questão **3.** (1,5 pontos)

(a) *Enuncie o teorema do valor médio.*

(b) *Demonstre, a partir do teorema do valor médio, que se* $f : I \to \mathbb{R}$ *for uma função derivável no intervalo* I, *cuja derivada se anula identicamente, então* f *é uma função constante.*

Questão **4.** (3 pontos) *Determine os pontos de máximo e mínimo* (*caso existam*) *da função dada, no intervalo dado, e justifique.*

(a) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$, *em* $[-1, 2]$.

(b) $f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2}$, *em* $(0, 2)$.

Questão **5.** (1,5 pontos)

(a) *Encontre a área da região do plano cartesiano limitada pelas curvas* $y = x^2$ *e* $y = \sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

(b) *Calcule* $\int \arctan x \, dx$.

Questão **6.** (1,5 pontos) *Dada* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua, considere* $g(x) = e^{x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} f(t)\, dt$. *Calcule* $g'(0)$.

Questão 1

(a) (i) $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua

se $\forall a \in A$, $\exists \lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(ii) $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é derivável

se $\forall a \in A$, $\exists \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

(b) (i) Decorre das regras p/ cálculo de limites vistas em aula que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Como $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \overset{\to 0}{x} \underbrace{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}_{\text{limitada}} = 0 = f(0)$,

segue-se que f é contínua em 0. Assim, f é contínua.

(ii) f é derivável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, como consequência da regra de Leibnitz e da regra da cadeia.

Como $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

e como $\nexists \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$, segue-se que f não é derivável no zero.

Questão 2 :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (x^2+1)^x = \exp[x \ln(x^2+1)]$$

Pela regra da Cadeia e pela regra de Leibnitz, tem-se, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \exp[x \cdot \ln(x^2+1)] \cdot \left(\ln(x^2+1) + \frac{x}{x^2+1} \cdot 2x \right)$$

Questão 3 :

(a) Seja $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Então $\exists c \in (a,b)$ t.q. $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$.

(b) Sejam $a, b \in I$, $a < b$. Então $f|_{[a,b]}$ satisfaz a hipótese do TVM; com $f' \equiv 0$, segue-se que $f(b) - f(a) = 0 \cdot (b-a) = 0$. Ou seja, $\forall a, b \in I$, $a \neq b \Rightarrow f(a) = f(b)$ $\therefore$ f é constante.

#

Questão 4

(a) $f : [-1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto (x^3 - 2x^2)^{1/3}$

é contínua no intervalo compacto $[-1, 2]$; assim, pelo teorema de Weierstrass, f assume máximo e mínimo no referido intervalo. Além disso, para todo $x \in [-1, 2] \setminus \{0, 2\}$ tem-se $x^3 - 2x^2 \neq 0$; assim, pela regra da cadeia, f é derivável em $[-1, 2] \setminus \{0, 2\}$. Nos pontos 0 e 2 f não é derivável, por inspeção direta do quociente de Newton de f nos referidos pontos. Assim, a função derivada de f é dada por:

$$f' : [-1, 2] \setminus \{0, 2\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{3} (x^3 - 2x^2)^{-2/3} \cdot (3x^2 - 4x)$$

e $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 2] \setminus \{0, 2\}$ e $3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4/3$.

Portanto, do teorema de Weierstrass e do teorema de Fermat conclui-se que os pontos de máximo e míni

$\{-1, 0, 4/3, 2\}$. Ora:

$f(-1) = \sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3}$

$f(0) = f(2) = 0 > f(4/3)$

$f(4/3) = -\sqrt[3]{\frac{32}{27}} > -\sqrt[3]{3} = f(-1)$

$\therefore$ 0 e 2 são os pontos de máximo

-1 é o ponto de mínimo.

(b) $f : (0, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{1}{x^3 - 2x^2}$

$f' : (0, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$

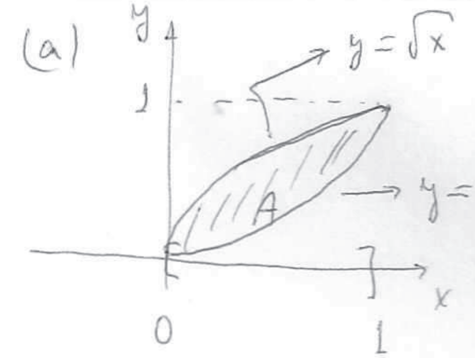
$x \longmapsto -\dfrac{1}{(x^3-2x^2)^2} \cdot (3x^2 - 4x)$

$\therefore \begin{cases} f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4/3 \\ f' < 0 \text{ em } (0, 4/3) \overset{TVM}{\Longrightarrow} f \text{ estritamente decrescente em } (0, \frac{4}{3}) \\ f' > 0 \text{ em } (4/3, 2) \overset{TVM}{\Longrightarrow} f \text{ " crescente em } (\frac{4}{3}, 2) \end{cases}$

Logo, $\begin{cases} \frac{4}{3} \text{ é ponto de mínimo de } f \\ f \text{ não tem ponto de máximo em } (0, 2). \end{cases}$

#

(a)



$$A = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2\,dx =$$

$$\overset{TFC}{=} \left.\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

(b)

$$\int \underbrace{\arctan x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = uv - \int v\,du =$$

$$= x\arctan x - \int \overbrace{\frac{x}{\underbrace{1+x^2}_{w}}\,dx}^{dw/2} =$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + K.$$

Questão 6: Como f é contínua, segue-se que $\begin{array}{l}\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\\ t \longmapsto e^{-t^2} f(t)\end{array}$ é uma função contínua.

Assim, pelo 2º TFC a função $\begin{array}{l}\mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}\\ x \longmapsto \int_0^x e^{-t^2} f(t)\,dt\end{array}$

é derivável e, $(\forall x \in \mathbb{R})\ h'(x) = e^{-x^2} f(x)$. Finalmente, por Leibnitz: $g'(x) = 2x e^{x^2} h(x) + e^{x^2}\cdot h'(x) \therefore g'(0) = \boxed{f(0)}$.