MAT 111 - Cálculo I
SUB - 28 de junho de 2010
Turma: Computação - Professor: Gláucio Terra

Nome:____	Nota:
No. USP:____________________RG:____________________	
Assinatura:____	

Justifique todas as suas respostas. Boa prova!

QUESTÃO **1.** (2,5 ptos.) *Para um peixe nadando a uma velocidade v em relação à água a energia gasta por unidade de tempo é proporcional a v^3. Acredita-se que peixes migratórios tentam minimizar a energia total requerida para nadar uma distância fixa. Se o peixe estiver nadando contra uma corrente u $(0 < u < v)$, então o tempo requerido para nadar uma distância L é $\frac{L}{v-u}$ e a energia total E requerida para nadar a referida distância é dada por:*

$$E(v) = av^3 \cdot \frac{L}{v-u} \tag{1}$$

onde $a > 0$ é uma constante de proporcionalidade. Determine (caso exista) o valor de v que minimiza E (i.e. encontre o ponto de mínimo da função $E : (u, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por (1)).

RESPOSTA: A função $E : (u, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por (1) é derivável, e sua derivada é dada por $\big(\forall\, v \in (u, +\infty)\big)\; E'(v) = \frac{2v^3 - 3v^2u}{(v-u)^2} = \frac{v^2(2v-3u)}{(v-u)^2}$. Como $2v - 3u > 0$ se $v > \frac{3u}{2}$ e $2v - 3u < 0$ se $v < \frac{3u}{2}$, segue que $E' > 0$ em $(\frac{3u}{2}, +\infty)$ e $E' < 0$ em $(u, \frac{3u}{2})$. Assim, por um corolário do teorema do valor médio, $\frac{3u}{2}$ é o ponto de mínimo de E.

QUESTÃO **2.** *Calcule:*

(a) (0,5 pto.) $\displaystyle\int_0^7 \sqrt{4+3x}\, dx$

(b) (1 pto) $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx$

RESPOSTA:

(a) Fazendo a mudança de variáveis $u = 4+3x$, obtém-se $\int_0^7 \sqrt{4+3x}\, dx = \frac{1}{3}\int_4^{25} u^{1/2}\, du = \frac{1}{3}\, \frac{u^{3/2}}{(3/2)}\,\big]_4^{25} = 26$.

(b) Integrando por partes duas vezes, obtém-se: $\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx = -e^x \cos x + [e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx]$, portanto $2\int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x$, donde $\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}\,(-e^x \cos x + e^x \sin x)$.

QUESTÃO **3.** (1 pto.) *Seja $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^x$. Encontre f' e f''.*

RESPOSTA: Tem-se $\big(\forall\, x > 0\big)\; f(x) = e^{x \ln x}$, portanto f é derivável (pela regra da cadeia), e $\big(\forall\, x > 0\big)\; f'(x) = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$. Então f' também é derivável (pela regra de Leibnitz), e $\big(\forall\, x > 0\big)\; f''(x) = x^x(\ln x + 1)^2 + \frac{x^x}{x}$.

QUESTÃO **4.** (2 ptos.) *Um objeto aquecido a* 100°C *é colocado em um quarto a uma temperatura ambiente de* 20°C*; um minuto após, a temperatura do objeto passa a* 90°C. *Admitindo* (lei do resfriamento de Newton) *que a temperatura $T = T(t)$ do objeto esteja variando a uma taxa proporcional à diferença entre a temperatura do objeto e a do quarto, ou seja:*

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(T - 20),$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ constante, determine a temperatura do objeto no instante t (suponha t em minutos).

Resposta: A equação dada é linear, e sua solução geral é $T(t) = Ae^{\alpha t} + 20$, $A \in \mathbb{R}$. Para que se tenha $T(0) = 100$, deveremos ter $A + 20 = 100$, i.e. $A = 80$. Como $T(1) = 90$, segue-se que $80e^{\alpha} + 20 = 90$, portanto $\alpha = \ln \frac{7}{8}$. Logo, $T(t) = 80(\frac{7}{8})^t + 20$.

Questão **5.** (3,0 ptos.) *Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique (se verdadeiro) ou apresente um contra-exemplo (se falso).*

(a) *Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f é derivável.*

Resposta: *Falso. Tome $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$. Então f é contínua, mas não é derivável em $x = 0$.*

(b) *Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função estritamente crescente. Então $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.*

Resposta: *Falso. Tome $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - e^{-x}$. Então $\big(\forall\, x \in [0, \infty)\big)\, f'(x) = e^{-x} > 0$, portanto f é estritamente crescente. No entanto, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, pois $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.*

(c) *Se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é derivável e $x_0 \in]0, 1[$ é tal que $f'(x_0) = 0$, então x_0 é ponto de máximo ou de mínimo local de f.*

Resposta: *Falso. Tome $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x - \frac{1}{2})^3$, e $x_0 = \frac{1}{2}$. Então $f'(x_0) = 0$, mas x_0 não é ponto de máximo nem de mínimo local.*

(d) *Se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é contínua e $x_0 \in]0, 1[$ é ponto de mínimo de f, então f é derivável em x_0 e $f'(x_0) = 0$.*

Resposta: *Falso. Tome $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$, e $x_0 = \frac{1}{2}$. Então x_0 é ponto de mínimo de f, mas f não é derivável em x_0.*

(e) *Se $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é uma função derivável cuja derivada se anula identicamente, então f é uma função constante.*

Resposta: *Falso. Tome $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1$ se $x > 0$, $f(x) = -1$ se $x < 0$. Então f não é uma função constante, mas sua derivada se anula identicamente.*