MAT 111 – Cálculo Diferencial e Integral I

1º semestre de 2017 - Primeira Prova - 17/03/2017

GABARITO

Questão 1.

a) (1,5) Determine o conjunto solução da inequação: $|x-1|-|x+2|>x$

Resposta:

$x-1>0 \Rightarrow x-1-|x+2|>x \Rightarrow |x+2|<-1 \Rightarrow S=\emptyset$

ou

$x-1<0 \Rightarrow -(x-1)-|x+2|>x \Rightarrow |x+2|<1-2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2\geq 0 \Rightarrow x+2<1-2x \Rightarrow x<-\frac{1}{3} \Rightarrow x\in[-2,-\frac{1}{3}[\\ \text{ou} \\ x+2<0 \Rightarrow -(x+2)<1-2x \Rightarrow x<3 \Rightarrow x\in]-\infty,-2[\end{cases}$$

Portanto, $S=\{x\in\mathbb{R} : x<-\frac{1}{3}\}$.

b) (0,5) Dê a definição de $\lim\limits_{x\to p^+} f(x)=-\infty$

Resposta:

$\lim\limits_{x\to p^+} f(x)=-\infty \Leftrightarrow$ dado $A<0$, existe um $\delta>0$ tal que $p<x<p+\delta$, então $f(x)<A$.

c) (0,5) Enuncie o Teorema do Confronto.

Resposta:

Sejam f,g,h três funções tais que

$$g(x)\leq f(x)\leq h(x),\ \text{para todo } x\in]p-r,p+r[\setminus\{p\},$$

com $x\in D_f\cap D_g\cap D_h$, e algum $r>0$.

Se $\lim\limits_{x\to p} g(x)=L$, $\lim\limits_{x\to p} h(x)=L$, então existe $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to p} f(x)=L$.

Questão 2. (2,5) Determine os valores de a e de b que tornam contínua a função f dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{3}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}} & \text{, se } \; x < 0 \\[2ex] a(x+1)+b & \text{, se } \; 0 \le x \le 1 \\[2ex] \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & \text{, se } \; x > 1 \end{cases}$$

Resposta:

Para os pontos $p \neq 0$ e $p \neq 1$ a função f é contínua em p, pois é soma, quociente e composta de funções contínuas.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt{3}(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{3-x}-\sqrt{3})(\sqrt{3-x}-+\sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x\sqrt{3}(\sqrt{3-x}+\sqrt{3})}{3-x-3} = \lim_{x\to 0^-} -\sqrt{3}(\sqrt{3-x}+\sqrt{3}) = -6 = f(0) = a+b.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x+2) = 3 = f(1) = 2a+b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b &= -6 \\ 2a+b &= 3 \end{cases} = \begin{cases} a = 9 \\ b = -15 \end{cases}$$

Questão 3. (2,0) Calcule, caso exista, os seguintes limites:

a) $$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+3}\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2+3}\right)\frac{\left(\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2+3}\right)}{\left(\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2+3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+5x-x^2-3}{\left(\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2+3}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{5x-3}{\left(\sqrt{x^2+5x}+\sqrt{x^2+3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(5-\frac{3}{x}\right)}{\left(|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}}+|x|\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(5-\frac{3}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)}$$

$$\overset{(x<0)}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(5-\frac{3}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\left(5-\frac{3}{x}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}}+\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}\right)} = -\frac{5}{2}$$

b) $$\lim_{x\to2^+}\frac{6x^2-9x-6}{x^3-x^2-8x+12} = \lim_{x\to2^+}\frac{3(2x+1)(x-2)}{(x+3)(x-2)(x-2)} = \lim_{x\to2^+}\frac{3(2x+1)}{(x+3)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to2^+}\frac{3(2x+1)}{(x+3)}\frac{1}{x-2} \overset{L.\infty}{=} +\infty$$

pois, $\displaystyle\lim_{x\to2^+}\frac{3(2x+1)}{(x+3)} = 3$ e $\displaystyle\lim_{x\to2^+}\frac{1}{x-2} = +\infty$,

Questão 4. Decida se cada afirmação abaixo é V ou F e justifique a sua resposta.

a) (2,0) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x - \pi} \leq f(x) - 1 \leq \frac{3x}{\pi} - 4, \text{ para } x > \pi,$$

então $\lim_{x\to\pi^+} f(x) \cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right) = 0$.

Resposta: VERDADEIRO

Como:

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{\operatorname{sen}\ x}{x-\pi} \overset{(y=x-\pi)}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(y+\pi)}{y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y \cos\pi + \operatorname{sen}\pi \cos y}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} y}{y} \cos\pi = \lim_{y\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen} y}{y} = -1 \text{ (limite fundamental)}$$

e

$$\lim_{x\to\pi^+} \left(\frac{3x}{\pi} - 4\right) = -1,$$

pelo Teorema do Confronto, temos que $\lim_{x\to\pi^+} (f(x) - 1) = -1$, ou seja, $\lim_{x\to\pi^+} f(x) = 0$.

E como $|\cos x| \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, temos que $\lim_{x\to\pi^+} f(x)\cos\left(\frac{1}{x-\pi}\right) = 0$.

b) (0,5) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função tal que $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ e g é uma função qualquer, então $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0$.

Resposta: FALSO

Sejam $f(x) = x$ e $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Temos que $\lim_{x\to p} f(x) = 0$, porém $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = \lim_{x\to p} x\dfrac{1}{x} = 1$.

c) (0,5) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$.

Resposta: FALSO

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\tfrac{1}{x} = 0, \text{ pois } \lim_{x\to 0} x = 0 \text{ e } |\operatorname{sen} x| \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$