MAT 111 – Cálculo Diferencial e Integral I

1º semestre de 2017 - Segunda Prova - 22/05/2017

GABARITO

Questão 1. (2,5) Calcule, caso existem, os seguintes limites. Justifique as suas respostas.

a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+2)}{e^{3x}} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+2}}{3e^{3x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3(x^2+2)e^{3x}} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3(2xe^{3x}+(x^2+2)3e^{3x})} = 0$$

b) $$\lim_{x\to 0}(3x+e^{2x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(3x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(3x+e^{2x})} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(3x+e^{2x})}{x}} = (*)$$

Vamos calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(3x+e^{2x})}{x} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3+2e^{2x}}{3x+e^{2x}}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{3+2e^{2x}}{3x+e^{2x}} = \frac{5}{1} = 5$

Portanto, $(*) = e^5$.

Questão 2.

a) (1,5) Calcule a derivada de $f(x) = \operatorname{arcsen}(3x) + x^{\operatorname{sen} x}$

Resolução:

$$f(x) = \operatorname{arcsen}(3x) + e^{\ln x^{\operatorname{sen} x}} = \operatorname{arcsen}(3x) + e^{\operatorname{sen} x \ln x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}(3x)' + e^{\operatorname{sen} x \ln x}(\operatorname{sen} x \ln x)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}(3) + e^{\operatorname{sen} x \ln x}(\cos x \ln x + \frac{1}{x}\operatorname{sen} x) \\ &= \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} + x^{\operatorname{sen} x}(\cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}) \end{aligned}$$

b) (1,5) Seja $y = f(x)$ uma função derivável dada implicitamente pela equação: $\operatorname{arctg}(x^2-1) + 3xy = 3x^3 + 2y$. Determine a reta normal ao gráfico da f no ponto de abscissa 1.

Resolução:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 1 \\ \operatorname{arctg}(x_0^2-1) + 3x_0y_0 = 3x_0^3 + 2y_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 3y_0 = 3 + 2y_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = 3$$

$$\frac{d}{dx}\Big(\operatorname{arctg}(x^2-1) + 3xy\Big) = \frac{d}{dx}\Big(3x^3 + 2y\Big)$$

$$\frac{2x}{1+(x^2-1)^2} + 3y + 3x\frac{dy}{dx} = 9x^2 + 2\frac{dy}{dx}$$

$$(3x-2)\frac{dy}{dx} = 9x^2 - \frac{2x}{1+(x^2-1)^2} - 3y$$

$$(3x_0-2)\frac{dy}{dx}(x_0) = 9x_0^2 - \frac{2x_0}{1+(x_0^2-1)^2} - 3y_0$$

$$x_0 = 1 \Longrightarrow (3.1-2)\frac{dy}{dx}(1) = 9.1^2 - \frac{2.1}{1+(1^2-1)^2} - 3.3 \Longrightarrow f'(1) = \frac{dy}{dx}(1) = -2.$$

A equação da reta normal é dada por:

$$y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x-1),$$

ou seja,

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x-1).$$

Questão 3.

a) (0,5) Enuncie o Teorema do Valor Médio.

Seja $f : [b, a] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[b, a]$ e derivável $]b, a[$. Então existe $c \in]b, a[$ tal que

$$f(a) - f(b) = f'(c)(a - b).$$

b) (1,0) Mostre que $|\ln \frac{a}{b}| \leq |a - b|$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.

Resolução:

Seja $f(x) = \ln x$ e considere $a, b \in [1, +\infty[$. Sem perda de generalidade, suponha $b < a$.

Temos que f é contínua em $[b, a]$ e derivável em $]b, a[$. Pelo TVM, temos que existe $c \in]b, a[$ tal que $\ln a - \ln b = f'(c)(a - b)$.

Como $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ e $1 \leq b < c < a$, temos que $f'(c) = \dfrac{1}{c} < 1$

Portanto, $\ln a - \ln b = \dfrac{1}{c}(a - b) < 1(a - b)$, o que implica que,

$$|\ln a - \ln b| < |a - b|,$$

ou seja,

$$\left|\ln \frac{a}{b}\right| < |a - b|.$$

Questão 4. (3,0) Dada a função $f(x) = 1 + \dfrac{3-x}{x^2}$:

i) domínio de f;

ii) int. de cresc. e decresc. de f e os pontos de máx. e de mín. locais e globais;

iii) intervalos de concavidade de$f$ e pontos de inflexão;

iv) limites necessários e esboce o gráfico de f.

Resolução:

i) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

ii) $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; f'(x) \;=\; -\dfrac{6}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} \;=\; \dfrac{-6+x}{x^3} \;=\; \dfrac{x-6}{x^3}$

$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	f
$-$	$-$	$+$	$x-6$
$-$	$+$	$+$	x^3
$+$	$-$	$+$	f'

$0 \qquad 6$

Ponto de mínimo local e global: $x = 6$.

iii) $f'(x) = -\dfrac{6}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} \;\Rightarrow\; f''(x) = \dfrac{18}{x^4} - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{18-2x}{x^4} = \dfrac{2(9-x)}{x^4}$

$\cup$	$\cup$	$\cap$	f
$+$	$+$	$-$	$9-x$
$+$	$+$	$-$	f''

$0 \qquad 9$

Ponto de inflexão: $x = 9$.

iv) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}\right) = 1 \qquad f(6) = \frac{33}{36}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\left(1 + \frac{3-x}{x^2}\right) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\left(1 + \frac{3-x}{x^2}\right) = +\infty \qquad f(9) = \frac{75}{81}$