

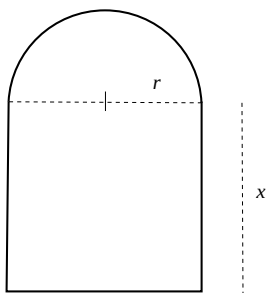
MAT 111 – Cálculo Diferencial e Integral I

1º semestre de 2017 - Terceira Prova - 26/06/2017

GABARITO

-A-

Questão 1. (1,5) Uma janela em estilo normando consiste em um retângulo com um semicírculo sobre ele. Se o perímetro de uma janela normanda for de 30 m, determine qual deve ser o raio do semicírculo e a altura do retângulo, tal que a janela deixe passar o máximo de luz.



Resolução:

$$\text{Perímetro} = 2x + 2r + \pi r = 30. \text{ Portanto, } x = \frac{30 - \pi r - 2r}{2}.$$

$$\text{Área} = 2rx + \frac{\pi r^2}{2} = 2r \left(\frac{30 - \pi r - 2r}{2} \right) + \frac{\pi r^2}{2} = 30r - \pi r^2 - 2r^2 + \frac{\pi r^2}{2} = 30r - 2r^2 - \frac{\pi r^2}{2}$$

$$\text{Seja } A(r) = 30r - 2r^2 - \frac{\pi r^2}{2}$$

Vamos determinar os pontos críticos de A .

$$A'(r) = 30 - 4r - \pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{30}{4 + \pi}$$

Pelo diagrama abaixo

↗		↘		f
	+		-	
0		$\frac{30}{4+\pi}$		$\frac{30}{2+\pi}$
f'				

observamos que $r = \frac{30}{4 + \pi}$ é o ponto de máximo de A no intervalo $\left[0, \frac{30}{2 + \pi}\right]$.

Portanto, para que se tenha a maior incidência de luz as medidas da janela tem que ser:

$$r = \frac{30}{4 + \pi} \text{ e } x = \frac{30}{4 + \pi}.$$

Questão 2. (2,0) Seja $f(x) = e^x$. Usando o polinômio de Taylor em torno de $x_0 = 0$, ache um valor de n que permita calcular $\sqrt[5]{e}$ com erro, em módulo, menor do que 10^{-5} . Justifique a sua resposta.

Resolução:

Sejam $f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$.

Como $f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $f^{(n)}(0) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, temos que o polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de x_0 é dado por:

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!},$$

e o erro é dado pela função $E_n(x) = \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} x^{n+1}$, onde $\bar{x}$ está entre 0 e x .

Como $\sqrt[5]{e} = e^{\frac{1}{5}}$, temos que $\left| E_n\left(\frac{1}{5}\right) \right| = \left| \frac{e^{\bar{x}}}{(n+1)!} \frac{1}{5^{n+1}} \right| < \frac{3}{(n+1)!} \frac{1}{5^{n+1}}$, pois como $0 < \bar{x} < \frac{1}{5} < 1$, segue que $e^{\bar{x}} < e^1 < 3$ (e^x é uma função estritamente crescente).

Portanto, para $n = 4$ temos que:

$$\left| E_4\left(\frac{1}{5}\right) \right| < \frac{3}{5!} \cdot \frac{1}{5^5} = \frac{3}{120} \cdot \frac{1}{3125} = 0,000008 = 0,8 \times 10^{-5} < 10^{-5}.$$

Com isso, temos que: $\sqrt[5]{e} = e^{\frac{1}{5}} \approx P_4\left(\frac{1}{5}\right) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$.

Questão 3. (3,5) Calcule as seguintes primitivas:

$$a) \int \frac{x^2 + x^5}{1 + x^6} dx = \int \frac{x^2}{1 + x^6} dx + \int \frac{x^5}{1 + x^6} dx \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{3} \int \frac{1}{1 + w^2} dw + \frac{1}{6} \int \frac{1}{y} dy =$$

$$(*) \boxed{w = x^3 \Rightarrow dw = 3x^2 dx \quad \text{e} \quad y = 1 + x^6 \Rightarrow dy = 6x^5 dx}$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} w + \frac{1}{6} \ln |y| + k = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x^3 + \frac{1}{6} \ln(1 + x^6) + k$$

$$b) \int x^2 \operatorname{arctg}(2x) dx \stackrel{(*)}{=} \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{3} \int \frac{2x^3}{1 + 4x^2} dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{3 \cdot 4} \int \frac{x^2 \cdot 8x}{1 + 4x^2} dx \stackrel{(**)}{=}$$

$$(*) \boxed{\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg}(2x) \Rightarrow du = \frac{2}{1+4x^2} dx \\ dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{array}} \quad (**) \boxed{\begin{array}{l} 1 + 4x^2 = w \\ 8x dx = dw \\ x^2 = \frac{w-1}{4} \end{array}}$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{12} \int \frac{w-1}{4} \frac{1}{w} dw = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1}{48} \int \left(1 - \frac{1}{w}\right) dw$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg}(2x) - \frac{w}{48} + \frac{1}{48} \ln |w| + k = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg}(2x) - \frac{1 + 4x^2}{48} + \frac{1}{48} \ln(1 + 4x^2) + k$$

$$c) \int \frac{x^3}{x^2 + 2x + 6} dx = \int \left[x - 2 - \frac{2x - 12}{x^2 + 2x + 6} \right] dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \int \left[\frac{2x + 2 - 14}{x^2 + 2x + 6} \right] dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x - \int \left[\frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 6} + \frac{14}{x^2 + 2x + 6} \right] dx \stackrel{(*)}{=} \frac{x^2}{2} - 2x - \int \frac{1}{u} du + \int \frac{14}{x^2 + 2x + 6} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x - \ln |u| + \int \frac{14}{5 \left[1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{5}} \right)^2 \right]} dx \stackrel{(**)}{=} \frac{x^2}{2} - 2x - \ln |u| + \int \frac{14}{5(1 + v^2)} \sqrt{5} dv =$$

$$(*) \boxed{\begin{array}{l} u = x^2 + 2x + 6 \\ du = (2x + 2) dx \end{array}} \quad (**) \boxed{\begin{array}{l} \frac{x+1}{\sqrt{5}} = v \\ x = -1 + \sqrt{5}v \\ dx = \sqrt{5} dv \end{array}}$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x - \ln |u| + \frac{14}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} v + k = \frac{x^2}{2} - 2x - \ln(x^2 + 2x + 6) + \frac{14}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{\sqrt{5}} \right) + k$$

Questão 4. (3,0) Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Dê um contra-exemplo, se for falsa, ou demonstre, se for verdadeira.

- a) Se $f'(x) = 0$, para todo $x \in D_f$, então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$, $\forall x \in D_f$.
- b) Dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se G_1 e G_2 são duas primitivas de f , então existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $G_2(x) = G_1(x) + k$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- c) Dada $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Se x_0 é um ponto de mínimo local de f , então $f'(x_0) = 0$.

Resolução:

- a) **Falso.** Seja $f(x) = \frac{|x|}{x}$, temos que $f'(x) = 0$, $\forall x \in D_f = \mathbb{R}^*$, mas f não é a função constante.
- b) **Verdadeiro.** De fato, seja $h(x) = G_2(x) - G_1(x)$. Como $G_2'(x) = G_1'(x) = f(x)$ para $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que $h'(x) = G_2'(x) - G_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e **como D_f é um intervalo**, pelo T.V.M., temos que existe um $k \in \mathbb{R}$ tal que, $h(x) = G_2(x) - G_1(x) = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja $G_2(x) = G_1(x) + k$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- c) **Falso.** Seja $f(x) = |x|$, temos que $x_0 = 0$ é um ponto de mínimo global (portanto, local) de f , pois $f(x) > f(0)$, para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mas f não é derivável em f , portanto não existe $f'(x_0)$.