1^aProva de Vetores e Geometria – MAT0112 – BM
1^osem. 2011 – Prof^{a}Fernanda

1. Seja $E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ uma base de $\mathbb{V}^3$. Verifique se os conjuntos de vetores a seguir são LI ou LD.

   (a) (1,0) $\{\overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}, 2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + 4\overrightarrow{e_3}\}$

   (b) (1,0) $\{2\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} + 4\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}, 6\overrightarrow{e_1} + 8\overrightarrow{e_2} + 10\overrightarrow{e_3}\}$

   Justifique suas respostas.

2. Seja $E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ uma base de $\mathbb{V}^3$. Considere $F = \{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\}$ onde

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f_1} &= 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} \\
\overrightarrow{f_2} &= 3\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} + 2\overrightarrow{e_3} \\
\overrightarrow{f_3} &= -2\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}
\end{aligned}$$

   (a) (1,0) Por que F é uma base de $\mathbb{V}^3$? Encontre M, a matriz de mudança de base da base E para a base F (notação: $E \xrightarrow{M} F$).

   (b) (1,0) Dado $[v]_E = (2, 1, 1)$, encontre $[v]_F$.

   (c) (1,0) Se $G \xrightarrow{N} F$ é a matriz de mudança de base de G para F,

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

   encontre $[v]_G$.

   Justifique suas respostas.

3. Decide se as afirmativas a seguir são verdadeiras, provando-as; ou falsas, dando um contra-exemplo.

   (a) (1,0) Seja $\overrightarrow{v}$ um vetor qualquer do $\mathbb{V}^3$. O par $\{\overrightarrow{v}, -\overrightarrow{v}\}$ é LD.

   (b) (1,0) Dois vetores de mesmo comprimento e mesma direção, mas com sentidos opostos, são opostos para a soma de vetores.

   (c) (1,0) Dois vetores com mesma direção podem tem representantes sobre retas concorrentes.

   Justifique suas respostas.

4. (2,0) Sejam A, B e C três pontos quaisquer, $A \neq B$. Utilizando vetores, prove que:

X é um ponto do segmento $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{CX} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$, com $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ e $\alpha + \beta = 1$.

{**Sugestão:** Dados quatro pontos A, B, C e X, como na figura abaixo, tais que $\overrightarrow{AX} = m\overrightarrow{XB}$, exprima $\overrightarrow{CX}$ em função de $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ e m.} **Justifique sua resposta.**