A

MAT0112 - Vetores e Geometria

1ª Prova - 17/04/2018

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Nome : ______________________________

NºUSP : ______________________________

Atenção:

1. Leia os enunciados com atenção.
2. Justifique todas as suas afirmações.
3. BOA PROVA!

1. **(2,5)** Seja $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base de $\mathbb{V}^3$. Considere os vetores $\vec{u} = (1, 0, 2a)_E$, $\vec{v} = (-1, a, -a)_E$ e $\vec{w} = (2, a, a+1)_E$.

   (a) Determine os valores de a tais que os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ sejam LD.

   (b) Para quais desses valores de a é possível escrever $\vec{w}$ como combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$? Nos casos em que for possível, escreva essa combinação linear.

   (c) Suponha que $a = 2$. Se possível, escreva $\vec{x} = (1, 1, 1)$ como combinação linear de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

(a) Queremos os valores de a para os quais a equação vetorial $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$ tenha solução não trivial.

Teremos então o sistema linear

$$x\begin{bmatrix}1\\0\\2a\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\a\\-a\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}2\\a\\a+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

e a matriz desse sistema é

Escalonar a matriz

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\0 & a & a\\2a & -a & a+1\end{bmatrix} \underset{L3-2aL1}{\sim} \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\0 & a & a\\0 & a & a+1-4a\end{bmatrix} \underset{L3-L2}{\sim} \begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\0 & a & a\\0 & 0 & 1-4a\end{bmatrix}$$

Se $\underline{a=0}$ $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ o sistema tem sol. não trivial: $z = 0$ e $x - y + 2z = 0 \Rightarrow z = 0$ e $x = y$

Se $a \neq 0$, para ter sol. não trivial é preciso que $1 - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$.

Resposta: São LD $\Leftrightarrow$ $a = 0$ ou $a = 1/4$.

A

(b) Se $a = 0$, $\vec{u} = (1,0,0)$ e $\vec{v} = (-1,0,0)$

Logo é claro que $\vec{u} = -\vec{v}$ e $\vec{w} = (2,0,1)$ não é múltipo de $\vec{u}$

Se $a = \frac{1}{4}$, então $\vec{u} = (1,0,\frac{1}{2})$ e $\vec{v} = (-1,\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$

Nesse caso, $(\vec{u},\vec{v})$ é LI e $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ LD então $\vec{w}$ é CL de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$$\vec{w} = (2,\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4}) = \alpha(1,0,\tfrac{1}{2}) + \beta(-1,\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{4})$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha - \beta = 2 \\ \frac{1}{4} = \beta\frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} = \alpha \cdot \frac{1}{2} - \frac{\beta 1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = 1 \text{ e } \alpha = 3 \quad \text{e } \frac{5}{4} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}.$$

<u>Resposta</u> $\vec{w} = 3\vec{u} + 1.\vec{v}$.

(c) Se $a = 2$, pelo item (a) $(a \neq 0 \text{ e } a \neq \frac{1}{4})$, $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ é LI e portanto é uma base de V^3.

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix}$$

A matriz completa do sistema é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right] \underset{L3-4L1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & -3 \end{array}\right] \underset{L3-L2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -4 \end{array}\right]$$

O sistema equivalente é:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 2z = 1 \\ 2y + 2z = 1 \\ -7z = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} z = 4/7 \\ 2y = 1 - \frac{8}{7} \quad y = -\frac{1}{14} \\ x = 1 + y - 2z \Rightarrow \\ x = 1 - \frac{1}{14} - \frac{8}{7} = -\frac{3}{14} \end{array}$$

Logo: $(1,1,1) = -\frac{3}{14}\vec{u} - \frac{1}{14}\vec{v} + \frac{4}{7}\vec{w}$.

2. **(2,5)** Seja $E = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ uma base **ortonormal** de $\mathbb{V}^3$. Sejam $\vec{u} = (2,2,3)_E$ e $\vec{v} = (1,-2,1)$.

   (a) Seja $\theta \in [0,\pi]$ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Determine $\cos\theta$.

   (b) Determine $proj_{\vec{u}}\vec{v}$.

   (c) Determine um vetor $\vec{x}$ com $\|\vec{x}\| = 10$ e $\vec{x} \perp \vec{u}$ e $\vec{x} \perp \vec{v}$.

(a) Como a base E é ortonormal,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2,2,3)\cdot(1,-2,1) = 2-4+3 = 1$$

Vale que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$

Logo $1 = \sqrt{17}\cdot\sqrt{6}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{102}}$,

(b) $$proj_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u} = \frac{1}{17}(2,2,3).$$

(c) $\vec{x} = (x,y,z)$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x}\perp\vec{u} \Rightarrow 2x+2y+3z=0 \\ \vec{x}\perp\vec{v} \Rightarrow x-2y+z=0 \end{array}\right\}(*)$$

Achar as soluções de $(*)$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_2-2L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo o sistema é equivalente a

$$\left.\begin{array}{l} 6y+z=0 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} z=-6y \\ x = 2y+6y = 8y \end{array}$$

As soluções são $y(8,1,-6)$, $y\in\mathbb{R}$.

Queremos $\|\vec{x}\| = 10$

$$10 = \sqrt{y^2}\cdot\sqrt{64+36+1}$$

$$10 = |y|\sqrt{101} \Rightarrow y = \pm\frac{10}{\sqrt{101}}$$

A e B

3. **(2,5)** As afirmações a seguir são **verdadeiras** ou **falsas** ? Demonstre as que forem as verdadeiras e quando a afirmação for falsa, exiba um exemplo que ilustre que ela é falsa.

   (a) A sequência de vetores $(\vec{u}, \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}+\vec{w})$ é uma base de $\mathbb{V}^3$ se, e somente se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI.

   (b) As sequências $(\vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{u}, \vec{w})$ e $(\vec{v}, \vec{w})$ são LI, se e somente se, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI.

   (c) Os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são tais que

$$\|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$$

   se, e somente se, eles são dois a dois ortogonais.

   Observação: As afirmações acima são **"se, e somente se"** ($\Leftrightarrow$). Verifique cada uma das duas implicações ($\Leftarrow$ e $\Rightarrow$).

(a) ($\Rightarrow$) Suponha que $(\underbrace{\vec{u}}_{\vec{x}}, \underbrace{\vec{u}+\vec{v}}_{\vec{y}}, \underbrace{\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}}_{\vec{z}})$ é LI

Mostrar que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ LI.

Suponha que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ (*) $\Longrightarrow$

$\alpha\vec{x} + \beta(\vec{y} - \vec{x}) + \gamma(\vec{z} - \vec{y}) = 0$

$(\alpha - \beta)\vec{x} + (\beta - \gamma)\vec{y} + \gamma\vec{z} = \vec{0}$.

Como $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ LI $\Rightarrow$ $\gamma = 0$

$\beta - \gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Logo, a única soluçõ de (*) é a trivial

$\Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ LI.

($\Leftarrow$) Suponha $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ LI. e suponha que

$\alpha\vec{u} + \beta(\vec{u}+\vec{v}) + \gamma(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}) = \vec{0}$ (**)

Entaõ: $(\alpha+\beta+\gamma)\vec{u} + (\beta+\gamma)\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ LI $\Rightarrow$ $\gamma = 0$

$\beta + \gamma = 0 \Rightarrow \beta = 0$

$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Assim (**) tem só a sol. trivial $\Rightarrow$ os vetores saõ LI.

Afirmaçaõ $\boxed{\text{VERDADEIRA}}$.

(b) $(\Leftarrow)$ Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ LI $\Longrightarrow (\vec{u}, \vec{v}), (\vec{u}, \vec{w}), (\vec{v}, \vec{w})$ LI

$A \subset B$

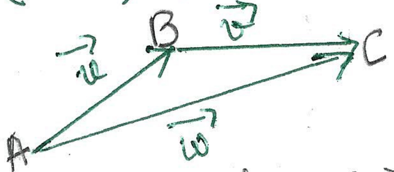
(De fato, se, por exemplo, $(\vec{u}, \vec{v})$ LD, existiriam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ não ambos nulos tais que

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$$

Então $\vec{0} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + 0.\vec{w}$ com $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$

contrariando o fato de que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ é LI.

$(\Longrightarrow)$ FALSA



$(\vec{u}, \vec{v})$ LI e $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

Temos que $\vec{u} + \vec{v} + (-1)\vec{w} = \vec{0}$

$\Longrightarrow (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ LD

No entanto, $(\vec{u}, \vec{v})$, $(\vec{u}, \vec{w})$, $(\vec{v}, \vec{w})$ são LI

(Exemplo Se E é uma base de $\mathbb{V}^3$:

$\vec{u} = (1,0,0)$, $\vec{v} = (0,1,0)$ e $\vec{w} = (1,1,0)$)

(c) $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$

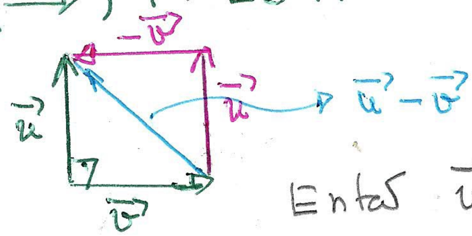
$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w})$

Logo $\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 \iff$

$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w} = 0}$ $(*)$

$(\Leftarrow)$ Se $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são 2 a 2 ortogonais é claro que vale $(*)$.

$(\Longrightarrow)$ FALSA



Tome $\vec{u} \perp \vec{v}$ com $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

e $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$

Então $\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$

$= 0 + \vec{u}\cdot\vec{u} - \cancel{\vec{u}\cdot\vec{v}} + \cancel{\vec{v}\cdot\vec{u}} - \vec{v}\cdot\vec{v}$

Como $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ então

$\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$

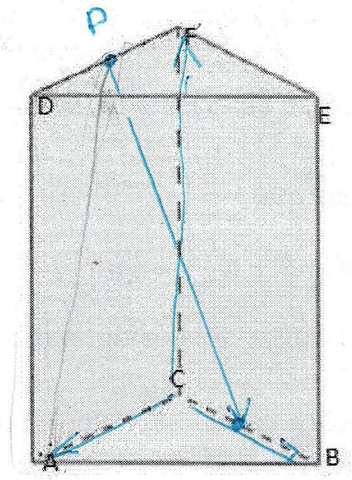
Exemplo $\vec{u} = (1,0,0)$ $\vec{w} = (1,-1,0)$

$\vec{v} = (0,1,0)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ $\vec{u}\cdot\vec{w} = 1$ $\vec{v}\cdot\vec{w} = -1$

(As coordenadas de $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são em relação a uma base ortonormal.)

4. **(2,5)** Considere em E^3 o prisma com faces triangulares ABC e DEF em que AD, CF e DE são arestas ortogonais às faces, como na figura abaixo. Sejam P o ponto médio do segmento FD e Q o ponto médio de CB



(a) Escreva o vetor $\overrightarrow{PQ}$ como combinação linear da base $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CF})$.

(b) Sabendo que a medida de CA = medida de $BC = \sqrt{3}$, medida de $AB = \sqrt{7}$ e medida de $AD = 5$, determine o cosseno do ângulo entre $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PA}$.

(a) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AQ}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$

Mas $\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Também, $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{CA}$.

Logo $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CF} - \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

Logo $\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + (-1)\overrightarrow{CF}$.

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PA} = \|\overrightarrow{PQ}\| \|\overrightarrow{PA}\| \cos\theta$, $\theta = \text{ang}(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PA})$

$(-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CF}) \cdot \overrightarrow{PA} = (-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CF}) \cdot (\frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CF})$

$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CF}$

Observe que: $\overrightarrow{CF} \perp \overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CF} \perp \overrightarrow{CB}$.

Precisamos calcular $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$.

Para isso, observe que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

Logo $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \|\overrightarrow{CB}\|^2$.

Assim, $7 = 6 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}$.

$$\vec{PQ} \cdot \vec{PA} = \left(-\frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB} - \vec{CF}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{CA} - \vec{CF}\right)$$

A

$$= -\frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{1}{4}\vec{CB} \cdot \vec{CA} + \|\vec{CF}\|^2$$

$$= -\frac{3}{4} - \frac{1}{8} + \frac{25}{8} = -\frac{7}{8} + 25 = \frac{200-7}{8}$$

$$= \frac{193}{8}$$

$$\|\vec{PQ}\|^2 = \left(-\frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB} - \vec{CF}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CB} - \vec{CF}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{1}{4}\vec{CA} \cdot \vec{CB} - \frac{1}{4}\vec{CB} \cdot \vec{CA} + \frac{3}{4} + 25$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{4} + 25 = \frac{7}{4} + 25 = \frac{107}{4}$$

$$\therefore \boxed{\|\vec{PQ}\| = \frac{\sqrt{107}}{2}}$$

$$\vec{PA} = \frac{1}{2}\vec{CA} - \vec{CF}$$

$$\|\vec{PA}\|^2 = \frac{1}{4}\|CA\|^2 + \|\vec{CF}\|^2 = \frac{3}{4} + 25 = \frac{103}{4}$$

Logo $\boxed{\|\vec{PA}\| = \frac{\sqrt{103}}{2}}$

$$\frac{193}{8} = \frac{\sqrt{103}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{107}}{\cancel{2}} \cos\theta$$

$$\frac{193}{2} = \sqrt{103} \cdot \sqrt{107} \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{193}{2\sqrt{103} \cdot \sqrt{107}}$$