A

MAT0112 - Vetores e Geometria

2ª Prova - 05/06/2018

Nome : ______________________________

NºUSP : ______________________________

Q	N
1	
2	
3	
Total	

Suponha fixado um sistema de coordenadas ortogonal com origem em O e base ortonormal positiva $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Nos exercícios a seguir, assumimos que as coordenadas dos vetores estão expressas em relação a uma base ortonormal positiva $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

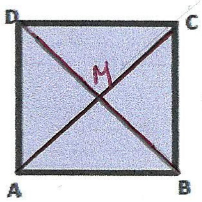
1. **(2,5)** O ponto $A = (1,1,1)$ é vértice de uma quadrado $ABCD$ e a diagonal BD está contida na reta

$$r : X = (1,2,2) + \lambda(1,0,1), \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Determine o ponto $M \in r$ tal que $\overrightarrow{AM}$ seja ortogonal à r.

(b) Determine o vértice C, oposto ao vértice A.

(c) Determine os outros dois vértices do quadrado.



(a) $M \in r \Rightarrow M = (1+\lambda, 2, 2+\lambda)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{AM} = (\lambda, 1, 1+\lambda)$

Queremos λ ~~tal que~~ $\overrightarrow{AM} \perp (1,0,1)$, isto é,

$\overrightarrow{AM} \cdot (1,0,1) = 0$. Logo $\lambda + 1 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1/2$.

Assim $M = (1/2, 2, 3/2)$.

(b) Como ABCD é um quadrado, as diagonais se encontram no ponto médio de ambas. Suponha então que $C = (x, y, z)$. Temos daí que

$M = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z+1}{2}\right) = (1/2, 2, 3/2)$.

Logo $C = (0, 3, 2)$.

(c) Como ABCD é um quadrado, temos que:

(1) M é pto médio de BC.

(2) $\|\overrightarrow{BD}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$

Escreva $B = (1+\lambda, 2, 2+\lambda)$ e $D = (1+\mu, 2, 2+\mu)$

já que $B, D \in r$

Então $\frac{2+\mu+\lambda}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{4+\lambda+\mu}{2} = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \lambda + \mu = -1$

$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$ $\quad \|\overrightarrow{BD}\|^2 = (\mu-\lambda)^2 + (\mu-\lambda)^2$

Logo $2(\mu-\lambda)^2 = 6 \Rightarrow (\mu - \lambda) = \pm\sqrt{3}$

Tomando $\mu - \lambda = -\sqrt{3}$

$\lambda + \mu = -1$ ... $\Rightarrow \mu = -1+\sqrt{3}$ ... $\lambda = -1 - \sqrt{3}$ ...

2. **(5,0)** Sejam $A = (1,1,0), B = (1,2,1), C = (-1,0,1)$ e $D = (3,1,2)$.

   (a) Escreva uma equação vetorial para a reta r determinda por A e B.

   (b) Determine uma equação geral para o plano π determinado por B, C e D.

   (c) Calcule o volume do tetraedro $ABCD$ e a altura relativa à base BCD.

   (d) Determine o simétrico do ponto A em relação ao plano π.

   (e) Determine a projeção da reta r no plano π.

(a) $\overrightarrow{AB} = (0,1,1)$

$r: X = (1,1,0) + \lambda(0,1,1), \ \lambda \in \mathbb{R}$.

(b) $\overrightarrow{CB} = (2,2,0) \quad \overrightarrow{DB} = (-2,1,-1)$

O vetor normal de π é paralelo a

$$\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{DB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

Assim uma equação de π é $-2x + 2y + 6z + d = 0$. Para encontrar d, usamos que $B \in \pi$ (por exemplo.)

Assim $-2 + 4 + 6 + d = 0 \Rightarrow d = -8$

$\pi: -2x + 2y + 6z - 8 = 0 \iff$

$x - y - 3z + 4 = 0$

(c) O volume do tetraedro é $V = \frac{1}{6}\left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DB}]\right|$

ou $\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{DB})\right| = \frac{1}{6}\left|(0,1,1) \cdot (-2,2,6)\right|$

$= \frac{1}{6}|2+6| = 8/6 = \frac{4}{3}$. Logo $V = 4/3$

A área da base BCD é $\frac{\|BC \wedge BD\|}{2} = \frac{\sqrt{4+4+36}}{2} = \frac{2\sqrt{11}}{2}$.

Assim $\frac{4}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{11} \cdot h \Rightarrow h = 4/\sqrt{11}$

(d) O ponto A', simétrico de A em relação à π está na reta perpendicular à π e que contém A.

Logo $A' \in t: X = (1,1,0) + \lambda(1,-1,-3)$.

O ponto médio do segmento AA' é $M = \pi \cap t$.

Quero λ tq $M = (1+\lambda, 1-\lambda, -3\lambda) \in \pi$

$\cancel{1} + \lambda - \cancel{1} + \lambda - 3 \cdot (-3\lambda) + 4 = 0$

$11\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = -4/11$

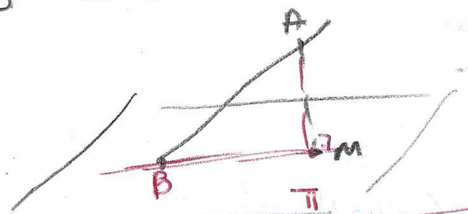
$M = (7/11, 15/11, 12/11)$

$A' = (x, y, z)$ com $\frac{x+1}{2} = 7/11$, $\frac{y+1}{2} = \frac{15}{11}$ e $\frac{z}{2} = \frac{12}{11}$.

(e) Já temos $B \in r \cap \pi$

Vamos então projetar outro ponto de r em π.
Por exemplo, vamos projetar $A = (1,1,0)$ em π
Mas já encontramos esse ponto em (c).
É $M = (7/11, 15/11, 12/11)$.

$\overrightarrow{MB}$ é o vetor diretor da reta procurada.



$B = (1,2,1)$
$\overrightarrow{MB} = (4/11, 7/11, -1/11)$

$r': X = (1,2,1) + \lambda(4,7,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

A e B

3. **(2,5)** Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}^3$ **vetores não nulos.**

(a) Dê um exemplo para mostrar que a propriedade associativa não vale em geral para o produto vetorial.

(b) Prove que se $(\vec{u}, \vec{w})$ é LD, então

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}).$$

(c) Mostre que

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$$

se, e somente se, os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são dois a dois ortogonais.

(a) $\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$ $\quad -\vec{j} \neq \vec{0}$
$(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} = \vec{0} \wedge \vec{j} = \vec{0}$

(b) $(\vec{u}, \vec{w})$ LD e $\vec{u} \neq \vec{0}$ $\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{w} = \alpha \vec{u}$.
$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \alpha \vec{u} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{u} = \alpha\, \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u})$
$= -\alpha \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) = -\alpha\, (-\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{u}))$
$= \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \alpha \vec{u}) = \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$

(c) $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{w} \neq \vec{0}$
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$
Seja $\theta = \text{ang}(\vec{v}, \vec{w})$, $\varphi = \text{ang}(\vec{u}, \vec{v} \wedge \vec{w})$
$0 \leq \theta, \varphi \leq \pi$

($\Leftarrow$) Suponha $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dois a dois ortogonais.
Então $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\vec{u} \perp \vec{w}$ $\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha (\vec{v} \wedge \vec{w}) \Rightarrow \varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$.
Logo $|\cos \varphi| = 1$.
Assim, $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \|\vec{u}\|\, \|\vec{v} \wedge \vec{w}\|\, |\cos \varphi| =$
$= \|\vec{u}\|\, \|\vec{v}\|\, \|\vec{w}\|\, \text{sen}\, \theta$
Como $\theta = \pi/2$, $\text{sen}\, \theta = 1$ e temos a igualdade.

($\Rightarrow$) Suponha que $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \|\vec{u}\|\, \|\vec{v}\|\, \|\vec{w}\|$.
Então $\text{sen}\, \theta\, |\cos \varphi| = 1$. (*)
Mas o único modo de acontecer (*) é
$\text{sen}\, \theta = |\cos \varphi| = 1$
Logo $\theta = \pi/2 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$.
Agora, $|\cos \varphi| = 1 \Rightarrow \varphi = 0$ ou $\varphi = \pi \Rightarrow$
$\vec{u} \parallel \vec{v} \wedge \vec{w} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ e $\vec{u} \perp \vec{w}$.