A

MAT0112 - Vetores e Geometria

3ª Prova - 26/06/2018

Nome : ____
NºUSP : ____

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Para os exercícios 1 e 2, suponha fixado um sistema de coordenadas ortogonal com origem em O e base ortonormal positiva $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Nos exercícios a seguir, assumimos que as coordenadas dos vetores estão expressas em relação a uma base ortonormal positiva $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. **(2,5)** Sejam r e s as retas

$$r : X = (1,2,2) + \lambda(1,2,3) \text{ e } s : X = (0,2,1) + \lambda(3,2,1),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

(a) Mostre que r e s são retas reversas.

(b) Dê uma equação geral para os planos π_1 e π_2 tais que $r \subset \pi_1$, $s \subset \pi_2$ e π_1 e π_2 paralelos.

(c) Determine os pontos $P \in r$ e $Q \in s$ tais que $\|\overrightarrow{PQ}\|$ seja igual à distância de r a s.

(a) Basta ver que se

$A = (1,2,2)$ e $B = (0,2,1)$ então

$(\overrightarrow{AB} = (-1,0,-1), (1,2,3), (3,2,1))$ é LI

Para isso é só calcular $\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(-4) + (-1)(-4) = 8 \neq 0$

(b) Seja $\vec{n}$ vetor normal a π_1 e π_2 (já que eles são paralelos).

Como $\left.\begin{array}{ll} r \subset \pi_1, & \vec{n} \perp (1,2,3) \\ s \subset \pi_2 & \vec{n} \perp (3,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n} \,/\!/\, (1,2,3) \wedge (3,2,1) =$

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$

Logo, $\vec{n} \,/\!/\, (1, -2, 1)$ e temos que

$\pi_1 : x - 2y + z + d_1 = 0$ $\quad$ $\pi_2 = x - 2y + z + d_2 = 0$

$(1,2,2) \in \pi_1 \Rightarrow 1 - 4 + 2 + d_1 = 0$ $\quad$ $(0,2,1) \in \pi_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow d_1 = 1$ $\quad$ $-4 + 1 + d_2 = 0 \Rightarrow d_2 = 3$

Logo $\pi_1 : x - 2y + z + 1 = 0$

$\pi_2 : x - 2y + z + 3 = 0$

(c) Queremos $P = (1+\lambda, 2+2\lambda, 2+3\lambda) \in r$, $Q = (3\mu, 2+2\mu, 1+\mu) \in s$

com $\overrightarrow{PQ} \,/\!/\, \vec{n}$. Assim, $\overrightarrow{PQ} \wedge \vec{n} = \vec{0}$

$|\vec{i} \;\; \vec{j} \;\; \vec{k}$ $\quad$ $) 8\mu - 4\lambda - 2 = 0$

2. **(2,5)** Seja π um plano que contém os pontos $P = (1,1,1)$ e $Q = (2,1,2)$, e seja r a reta de equação $X = (1,2,3) + \lambda(1,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) Verifique que r é paralela a π.

   (b) Determine uma equação geral para o(s) plano(s) π sabendo que ele equidista de r e do ponto $A = (1,0,0)$.

(a) Note que $\overrightarrow{PQ} = (1,0,1) \parallel \pi$ (já que $P, Q \in \pi$)

$r: X = (1,2,3) + \lambda(1,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$

Logo $r \parallel \pi$.

(b) $\pi: ax + by + cz + d = 0$

Como $P \in \pi \Rightarrow a + b + c + d = 0$
$Q \in \pi \Rightarrow 2a + b + 2c + d = 0$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} a + c = 0 \\ a + b + c + d = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b + d = 0 \end{cases}$$

Logo: $\pi: ax + by - az - b = 0$

$d(\pi, r) = d(\pi, X)$, $X \in r$ (pois $r \parallel \pi$)

$X = (1,2,3)$

$$d(\pi, r) = \frac{|a + 2b - 3a - b|}{\sqrt{2a^2 + b^2}} = \frac{|-2a + b|}{\sqrt{2a^2 + b^2}}$$

$$d(\pi, (1,0,0)) = \frac{|a - b|}{\sqrt{2a^2 + b^2}}$$

$d(\pi, r) = d(\pi, (1,0,0)) \Rightarrow |a - b| = |-2a + b|$

(1) $a - b = -2a + b \Rightarrow 3a = 2b \Rightarrow b = \frac{3}{2}a$

$\pi: ax + \frac{3}{2}ay - az - \frac{3}{2}a = 0$

$\frac{a}{2}(2x + 3y - 2z - 3) = 0$ $(a \neq 0)$

$\pi: 2x + 3y - 2z - 3 = 0$

(2) $a - b = -(-2a + b) \Rightarrow a = 0$ e b qualquer

Logo $\pi: by - b = 0$, ou seja $\pi: y = 1$.

Para os exercícios 3 e 4, suponha fixado um sistema de coordenadas ortogonal com origem em O e base ortonormal positiva $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.

3. **(2,0)** Esboce as cônicas $(6-c)x^2 + (3-c)y^2 = c$ para $c = 0, 1, 3, 4$. No caso da cônica ser uma hipérbole, esboce suas assíntotas.

$c = 0$ $\quad 6x^2 + 3y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$ PONTO $(0,0)$

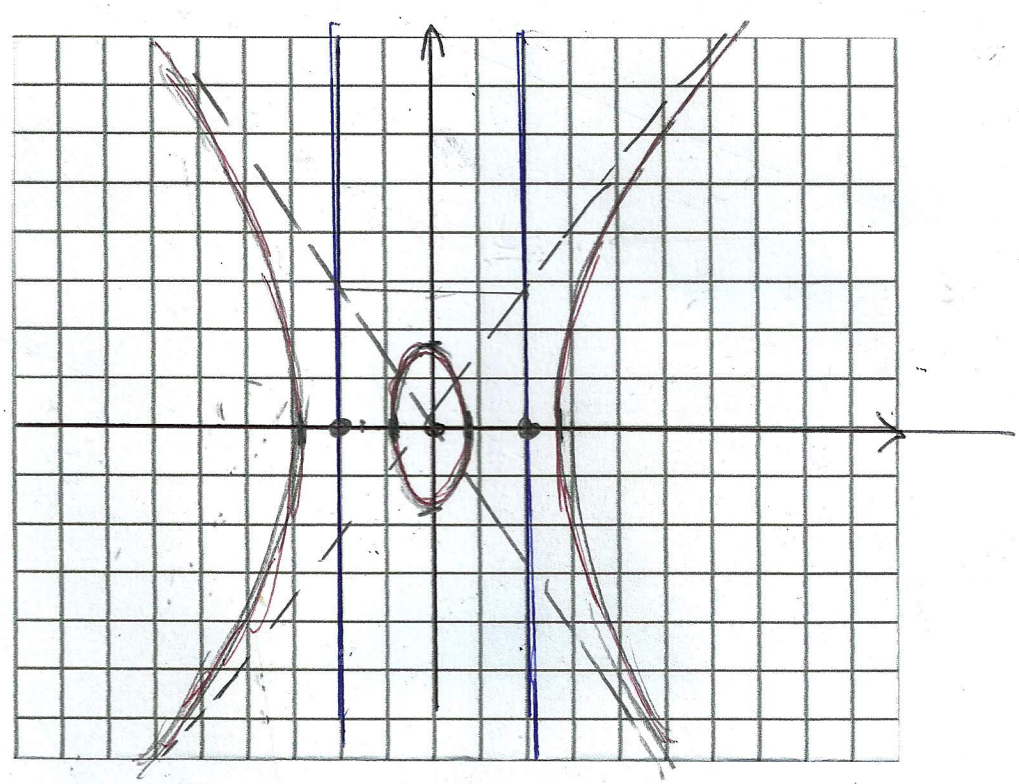
$c = 1$ $\quad 5x^2 + 2y^2 = 1$

$\frac{x^2}{1/5} + \frac{y^2}{1/2} = 1$ ELIPSE

$c = 3$ $\quad 3x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1$ 2 retas paralelas

$c = 4$ $\quad 2x^2 - y^2 = 4$ HIPÉRBOLE

$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$



$y^2 = 4\left(\frac{x^2}{2} - 1\right) \Rightarrow y^2 = 2(x^2 - 2)$

As assíntotas são as retas

$y = \pm\sqrt{2}\, x$

4. **(3,0)** Considere a equação $x^2 + 8xy + 7y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$.

   (a) Determine uma translação que elimina os termos lineares da equação.

   (b) Determine uma rotação que elimina os termos mistos da equação.

   (c) Reconheça e esboce a cônica.

   (d) Considere a cônica $x^2 + 8xy + 7y^2 + 2x + 8y + K = 0$. O que essa equação representa se $K = 1$? E se $K = 10$?

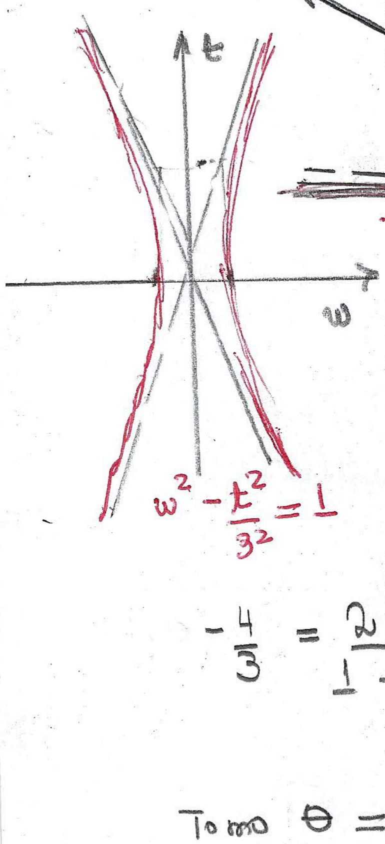
(a) $x = u + h$, $y = v + k$ $\begin{cases} 2h + 8k + 2 = 0 \\ 8h + 14k + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow h = -1$ e $k = 0$

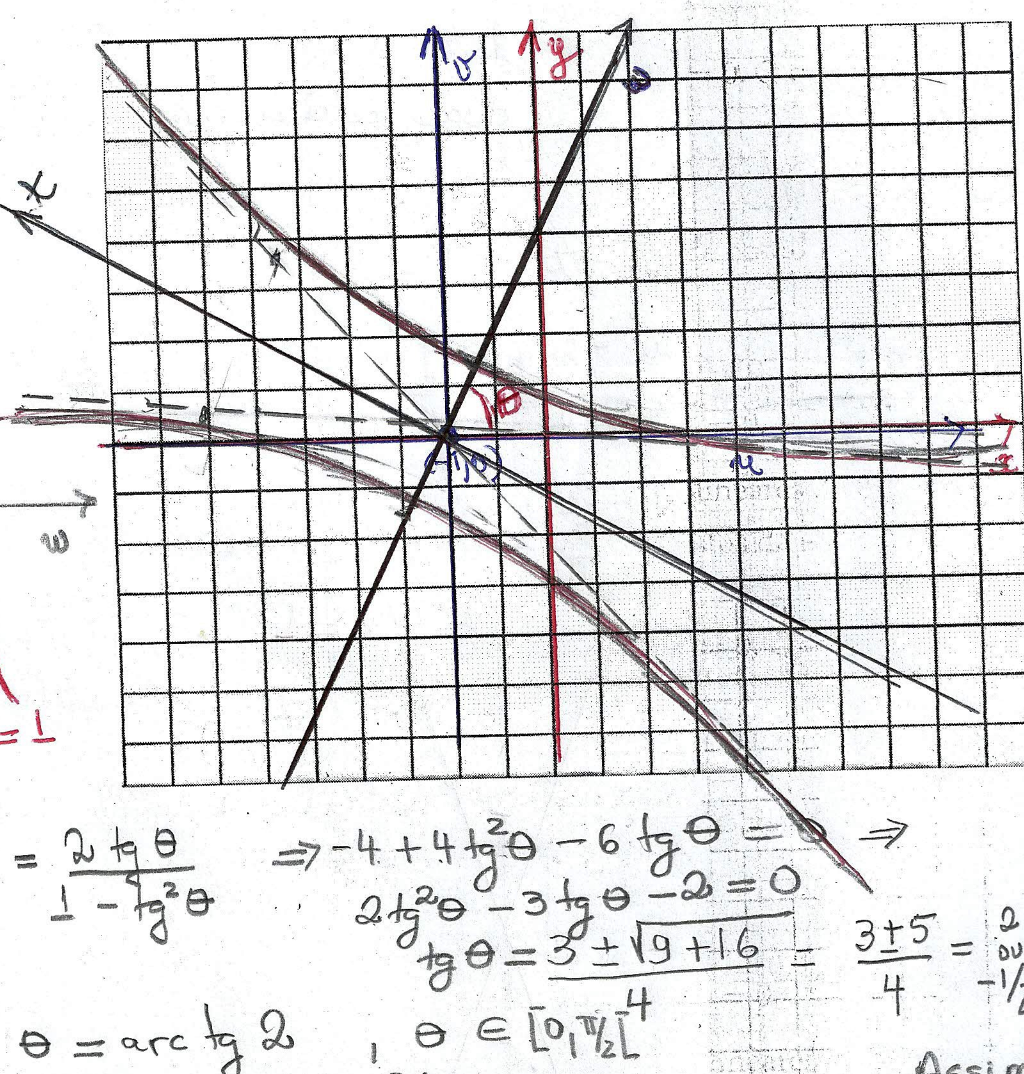
Se $H(x,y) = x^2 + 8xy + 7y^2 + 2x + 8y - 8 \Rightarrow H(-1,0) = 1 - 2 - 8 = 0$ $= -9$

Logo, a equaçã da cônica é, no novo sistema,

$u^2 + 8uv + 7v^2 - 9 = 0$

(b) Rotaçã para eliminar o termo misto. Tem que ser de um ângulo θ tal que $\operatorname{tg} 2\theta = \frac{8}{1-7} = -\frac{4}{3}$ //





$-\frac{4}{3} = \frac{2 \operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta} \Rightarrow -4 + 4\operatorname{tg}^2\theta - 6\operatorname{tg}\theta = 0 \Rightarrow$

$2\operatorname{tg}^2\theta - 3\operatorname{tg}\theta - 2 = 0$

$\operatorname{tg}\theta = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = 2$ ou $-1/2$

(c)

Tomo $\theta = \operatorname{arc}\operatorname{tg} 2$, $\theta \in [0, \pi/2[$

$\cos\theta = 1/\sqrt{5}$ e $\operatorname{sen}\theta = 2/\sqrt{5}$.

A equaçã da cônica será:

$aw^2 + ct^2 - 9 = 0$

Assim, a cônica a hipérbole $9w^2 - t^2 = 9$

(d) Seja $H(x,y) = x^2 + 8xy + 7y^2 + 2x + 8y + K$

$H(x,y) = 0$ (*)

Após realizada a translação

$x = u - 1$

$y = v + 0$

(*) torna-se $u^2 + 8uv + 7v^2 - 1 + K = 0$

Após a rotação de ângulo $\theta = \text{arctg}(2)$ (*)

fica (**) $9w^2 - t^2 - 1 + K = 0$

(i) Se $K = 1$ $\quad 9w^2 - t^2 = 0$

$(3w - t)(3w + t) = 0$

$\Leftrightarrow t = \pm 3w$

duas retas concorrentes

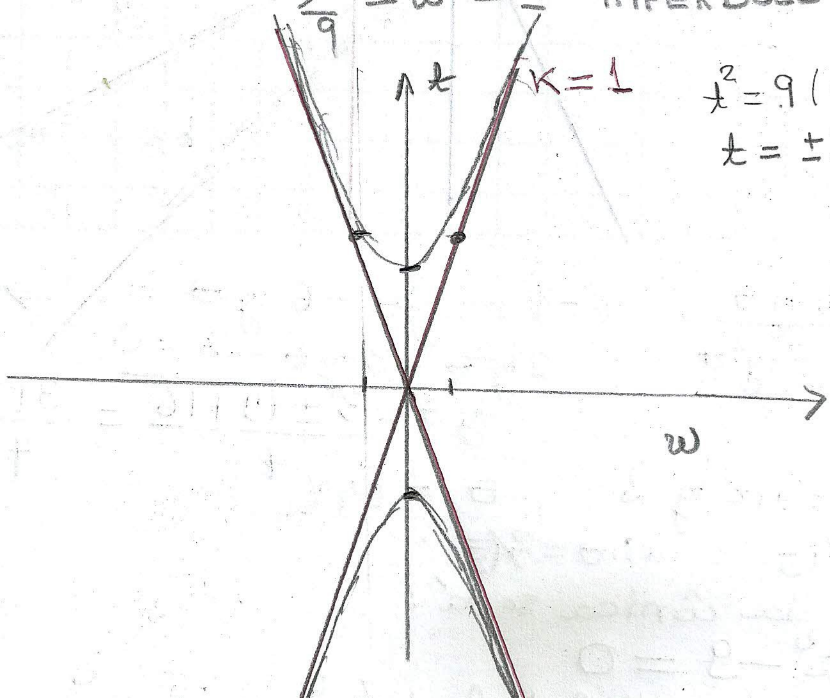
(ii) Se $K = 10$

$9w^2 - t^2 + 9 = 0$

$9w^2 - t^2 = -9$

$\Leftrightarrow w^2 - \frac{t^2}{9} = -1$ ou

$\frac{t^2}{9} - w^2 = 1$ HIPÉRBOLE



$t^2 = 9(w^2+1)$

$t = \pm 3(w^2+1)$