

86

MAT0112 - Vetores e Geometria Analítica
Prova 01 - IME - 2019
Profa. Mary Lihian Lourenço

Nome: Caio Serrano de Araújo
Nº USP: 10738008

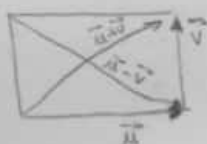
Q	N
1	1,9
2	2,3
3	3,0
4	2,9
Total	

10,2

Justifique devidamente suas respostas!

Toda solução da prova deve usar "linguagem de vetores"

1. (2,0 pontos) Mostre que as diagonais de um paralelogramo têm a mesma medida se, e somente se, o paralelogramo é um retângulo.



$$\vdash \| \vec{u} + \vec{v} \| = \| \vec{u} - \vec{v} \| \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

mult b

provando o ida, ou seja, se $\| \vec{u} + \vec{v} \| = \| \vec{u} - \vec{v} \|$, $\vec{u} \perp \vec{v}$

$$\begin{aligned} \| \vec{u} + \vec{v} \| &= \| \vec{u} - \vec{v} \| \rightarrow \| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} - \vec{v} \|^2 \rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \rightarrow \\ &\rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{u} + (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (-\vec{v}) \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{u} + (-\vec{v}) \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (-\vec{v}) + (-\vec{v}) \cdot \vec{v} \\ &\rightarrow = \| \vec{u} \|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \| \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \| \vec{v} \|^2 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{v} \rightarrow 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \\ &\| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \cos \theta = -(\| \vec{u} \| \| \vec{v} \| \cos \theta), \text{ dado que } \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \theta, \text{ temos, então} \\ &= \cos \theta = -\cos \theta, \text{ logo } \cos \theta = 0, \text{ portanto } \theta = 90^\circ \text{ e } \vec{u} \perp \vec{v} \end{aligned}$$

provando a volta, ou seja, se $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\| \vec{u} + \vec{v} \| = \| \vec{u} - \vec{v} \|$

se $\vec{u} \perp \vec{v}$, o produto escalar entre eles é zero, p^o que $\cos \theta = 0 \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\Rightarrow \| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \| \vec{u} \|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \| \vec{v} \|^2$$

como $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $\| \vec{u} + \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2$ (1)

$$\Rightarrow \| \vec{u} - \vec{v} \|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (-\vec{v}) + (-\vec{v}) \cdot \vec{u} + (-\vec{v}) \cdot (-\vec{v}) =$$

$$= \| \vec{u} \|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \| \vec{v} \|^2 \rightarrow \| \vec{u} - \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} \|^2 + \| \vec{v} \|^2 \quad (2)$$

comparando (1) e (2), temos que $\| \vec{u} - \vec{v} \|^2 = \| \vec{u} + \vec{v} \|^2$, então $\| \vec{u} - \vec{v} \| = \| \vec{u} + \vec{v} \|$

OK

2. (2,5 pontos) Considere um triângulo ABC e sejam M e N pontos do segmento AC e BC , respectivamente, tais que

$$\vec{CM} = \frac{1}{5} \vec{CA} \quad \text{e} \quad \vec{CN} = \frac{1}{5} \vec{CB}$$

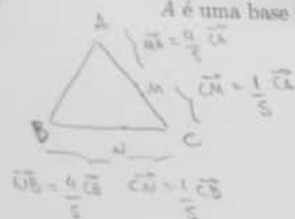
- a) Mostre que o segmento MN é paralelo ao segmento AB e tem por medida um quinto da medida deste lado.

- b) Considere $\vec{u} = \vec{CM}$ e $\vec{v} = \vec{CN}$. Mostre que

$$\left\{ \vec{u} - 3\vec{v}; \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} \right\}$$

é linearmente independente. $\frac{1}{5}\vec{CA} - 3\frac{1}{5}\vec{CB}; \frac{1}{5}\vec{CA} + \frac{1}{2}\frac{1}{5}\vec{CB}$

- c) Considere o conjunto $A = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$, onde $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dados no item b. A é uma base de V^3 ? Justifique sua resposta.



a) $\vec{MN} \parallel \vec{AB} \rightarrow \vec{MN} = \alpha \vec{AB} \quad \rightarrow \quad \|\vec{MN}\| = \frac{1}{5} \|\vec{AB}\|$

$$\vec{MN} = \vec{MC} + \vec{CN} \rightarrow \vec{MN} = -\vec{CM} + \vec{CN} \rightarrow \vec{MN} = -\frac{1}{5}\vec{CA} + \frac{1}{5}\vec{CB} \rightarrow$$

$$\vec{MN} = \frac{1}{5}\vec{AC} + \frac{1}{5}\vec{CB} \rightarrow \vec{MN} = \frac{1}{5}(\vec{AC} + \vec{CB}) \rightarrow \vec{MN} = \frac{1}{5}\vec{AB}, \text{ logo } \alpha = \frac{1}{5}$$

Como $\vec{MN} = \frac{1}{5}\vec{AB}$, $\vec{MN} \parallel \vec{AB}$, então: $\|\vec{MN}\| = \left\| \frac{1}{5}\vec{AB} \right\| \rightarrow \|\vec{MN}\| = \frac{1}{5} \|\vec{AB}\| \rightarrow$

$$\rightarrow \|\vec{MN}\| = \frac{1}{5} \|\vec{AB}\|$$

b) Como $\vec{CM} = \frac{1}{5}\vec{CA}$ e $\vec{CN} = \frac{1}{5}\vec{CB}$, $\left\{ \frac{1}{5}\vec{CA} - \frac{3}{5}\vec{CB}; \frac{1}{5}\vec{CA} + \frac{1}{10}\vec{CB} \right\}$ x.l.i.

considerando que $\vec{x} = \frac{\vec{CA}}{5} - \frac{3\vec{CB}}{5}$ e $\vec{y} = \frac{\vec{CA}}{5} + \frac{\vec{CB}}{10}$, temos: $a\vec{x} + b\vec{y} = \vec{0} \rightarrow$

$$a \left(\frac{\vec{CA}}{5} - \frac{3\vec{CB}}{5} \right) + b \left(\frac{\vec{CA}}{5} + \frac{\vec{CB}}{10} \right) = \vec{0} \rightarrow \left(\frac{a}{5}\vec{CA} + \frac{b}{5}\vec{CA}, -\frac{3a}{5}\vec{CB} + \frac{b}{10}\vec{CB} \right) = \vec{0} \rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{a}{5}\vec{CA} + \frac{b}{5}\vec{CA} = \vec{0} \\ -\frac{3a}{5}\vec{CB} + \frac{b}{10}\vec{CB} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{CA} \left(\frac{a}{5} + \frac{b}{5} \right) = \vec{0} \\ \vec{CB} \left(-\frac{3a}{5} + \frac{b}{10} \right) = \vec{0} \end{cases} \text{ Como } \vec{CA} \text{ e } \vec{CB} \neq \vec{0}, \text{ temos que: } \begin{cases} \frac{a}{5} + \frac{b}{5} = 0 \\ -\frac{3a}{5} + \frac{b}{10} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{5} + \frac{b}{5} = 0 \\ -\frac{3a}{5} + \frac{b}{10} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{5} = 0 \rightarrow a+b=0 \rightarrow a=-b \\ -\frac{6a+b}{10} = 0 \rightarrow -6a+b=0 \rightarrow a = \frac{b}{6} \end{cases}$$

Portanto, a e b não existem

0,08

Assim, se não existem a e b , os vetores não podem ser escritos como múltiplos dos outros, não sendo paralelos a uma mesma reta, portanto o conjunto é linearmente independente.

c) O conjunto $A = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ é uma base de V^3 . Para que A seja uma base, o conjunto deve ser linearmente independente. Como $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal tanto a $\vec{u}$ quanto a $\vec{v}$, os vetores não pertencem a um mesmo plano, ou seja, são linearmente independentes, tornando o conjunto A uma base.

sem pertencimento
a um mesmo plano

0,3

3. (3,0 pontos) Está fixada uma base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

a) Determine um vetor $\vec{u}$ de norma $\sqrt{11}$, ortogonal ao vetor $(-1, 2, 1)$ e tal que $\{\vec{u}, (2, 0, -1), (1, 1, -4)\}$ é um conjunto linearmente independente.

b) Considere $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dois vetores, cujo o ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é $\frac{\pi}{6}$ e $\|\vec{v}\| = 2$ e $\|\vec{w}\| = 5$.

(i) Calcule a medida do ângulo entre os vetores $(\vec{v} + \vec{w})(\vec{v} - \vec{w})$.

(ii) Calcule $\|\vec{v} \wedge \vec{w}\|$.

a) $\|\vec{u}\| = \sqrt{11}$ $\vec{u} \perp (-1, 2, 1)$ e $\{\vec{u}, (2, 0, -1), (1, 1, -4)\}$ é l.i.

dado que $\vec{u} = (x, y, z)$, temos: $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow 11 = x^2 + y^2 + z^2$ (1)

se $\vec{v} = (-1, 2, 1)$, como $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow x \cdot (-1) + y \cdot 2 + z \cdot 1 = 0$

$$-x + 2y + z = 0 \quad (2)$$

como $\{\vec{u}, (2, 0, -1), (1, 1, -4)\}$ é l.i., o determinante dos coordenados deve ser não nulo.

$$\det = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -y + 2z - (-x - 8y) = -y + 2z + x + 8y = x + 7y + 2z = 0 \quad (3)$$

$\neq 0$

juntando (1), (2), (3) temos um sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 11 \\ -x + 2y + z = 0 \rightarrow x = 2y + z \quad (4) \\ x + 7y + 2z = 0 \end{cases}$$

substituindo (4) em (3): $(2y + z) + 7y + 2z = 0 \rightarrow 9y + 3z = 0 \rightarrow -3z = -9y \rightarrow z = -3y$ (5)

substituindo (5) em (4): $x = 2y + (-3y) \rightarrow x = -y$ (6)

substituindo (5) e (6) em (1): $(-y)^2 + y^2 + (-3y)^2 = 11 \rightarrow y^2 + y^2 + 9y^2 = 11 \rightarrow$

$$y^2(1+1+9) = 11 \rightarrow y^2 = \frac{11}{11} \rightarrow y = \pm 1, \text{ logo } z = \pm 3 \text{ e } x = \pm 1$$

112

Se $\vec{u} = (x, y, z)$, temos $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
 e $\vec{v} = (-2, 2, 1)$, como $\vec{u} \perp \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow x \cdot (-2) + y \cdot 2 + z \cdot 1 = 0$
 $-x + 2y + z = 0 \quad (2)$

como $\{\vec{u}, (2, 0, -1), (1, 1, -4)\}$ é l.i., o determinante das coordenadas deve ser não nulo.

$$\det = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -y + 2z - (-x - 8y) = -y + 2z + x + 8y = x + 7y + 2z = 0 \quad (3)$$

Junstando (1), (2), (3) temos um sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 11 \\ -x + 2y + z = 0 \rightarrow x = 2y + z \quad (4) \\ x + 7y + 2z = 0 \end{cases}$$

substituindo (4) em (3): $(2y + z) + 7y + 2z = 0 \rightarrow 9y + 3z = 0 \rightarrow 3z = -9y \rightarrow z = -3y \quad (5)$

substituindo (5) em (4): $x = 2y + (-3y) \rightarrow x = -y \quad (6)$

substituindo (5) e (6) em (1): $(-y)^2 + y^2 + (-3y)^2 = 11 \rightarrow y^2 + y^2 + 9y^2 = 11 \rightarrow$

$11y^2 = 11 \rightarrow y^2 = \frac{11}{11} \rightarrow y = \pm 1$, logo $z = \pm 3$ e $x = \pm 1$

$\vec{u} = (-1, 1, 3)$ ou $\vec{u} = (1, -1, 3)$

b) (i) $(\vec{v} + \vec{w})(\vec{v} - \vec{w}) = \|\vec{v} + \vec{w}\| \cdot \|\vec{v} - \vec{w}\| \cdot \cos \alpha$, donde $\angle(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} - \vec{w}) = \alpha$

$\Rightarrow \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = (\vec{v} + \vec{w})(\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{v} + (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{w} =$
 $= \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{w} \cdot \vec{v} + \|\vec{w}\|^2 \quad (1)$, como $\vec{w} \cdot \vec{v} = \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \frac{\pi}{6} = 5 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

continuando (1): $= 2^2 + 2 \cdot 5\sqrt{3} + 5^2 = 4 + 10\sqrt{3} + 25 = 29 + 10\sqrt{3} = \sqrt{29 + 10\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = (\vec{v} - \vec{w})(\vec{v} - \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{v} + (-\vec{w}) \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (-\vec{w}) + (-\vec{w}) \cdot (-\vec{w}) = \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \|\vec{w}\|^2 =$
 $= 4 - 2 \cdot 5\sqrt{3} + 25 = 29 - 10\sqrt{3} = \sqrt{29 - 10\sqrt{3}}$

$\Rightarrow (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{w} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot (-\vec{w}) + \vec{w} \cdot (-\vec{w}) = \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2 = 2^2 - 5^2 = 4 - 25 = -21$

logo, $\cos \alpha = \frac{(\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w})}{\|\vec{v} + \vec{w}\| \cdot \|\vec{v} - \vec{w}\|} = \frac{-21}{\sqrt{29 + 10\sqrt{3}} \cdot \sqrt{29 - 10\sqrt{3}}} = \frac{-21}{\sqrt{29^2 - (10\sqrt{3})^2}} = \frac{-21}{\sqrt{841 - 300}} = \frac{-21}{\sqrt{541}}$

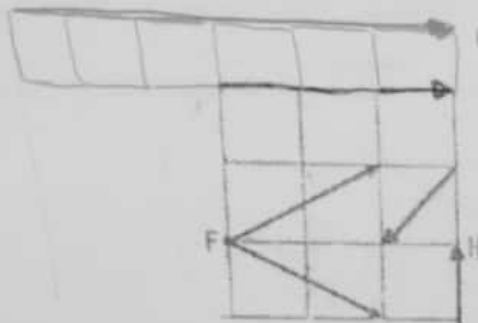
$$\cos \alpha = \frac{-21}{\sqrt{541}}, \text{ logo } \alpha = \arccos \frac{-21}{\sqrt{541}}$$

$$(ii) \|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 5 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

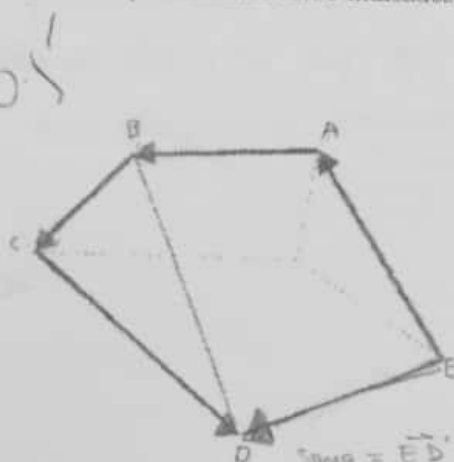
016

4. (3,0 pontos)

i) Represente a soma dos vetores, cujos os representantes estão indicados nas figuras abaixo.



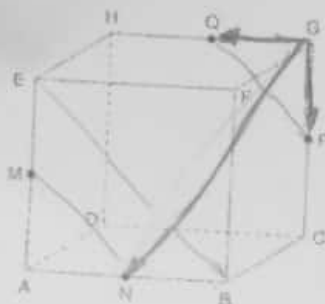
Soma = $2\vec{EH}$



Soma = $\vec{ED}$

0,6

ii) Na figura representa-se um cubo, sendo M, N, P, Q pontos médios das arestas.



(a) Escreva $\vec{MN}$ e $\vec{QP}$ em função de $\vec{EB}$.

(b) Prove que os vetores, cujo os representantes são $\vec{MN}$ e $\vec{QP}$, são paralelos e têm o mesmo comprimento.

(c) O conjunto dos vetores $\{\vec{GP}, \vec{GQ}, \vec{GN}\}$ são linearmente independentes? Justifique devidamente sua resposta.

(i) Na primeira figura, a soma é $2\vec{EH}$, e na segunda figura, a soma é $\vec{ED}$

(ii) a) $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN}$, como $\vec{MA} = \frac{1}{2}\vec{EA}$ e $\vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, temos:

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{EA} + \frac{1}{2}\vec{AB} \rightarrow \vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{EA} + \vec{AB}) \rightarrow \vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{EB} \quad 0,9$$

$$\vec{QP} = \vec{QG} + \vec{GP}, \text{ como } \vec{QG} = \frac{1}{2}\vec{HG} \text{ e } \vec{GP} = \frac{1}{2}\vec{GC}, \text{ temos: } \vec{QP} = \frac{1}{2}\vec{HG} + \frac{1}{2}\vec{GC} \rightarrow \vec{QP} = \frac{1}{2}(\vec{HG} + \vec{GC}) \rightarrow \vec{QP} = \frac{1}{2}\vec{HC}, \text{ como } \vec{HC} = \vec{EB}, \text{ já que são diagonais de faces opostas do cubo, temos: } \vec{QP} = \frac{1}{2}\vec{EB}$$

b) Como $\vec{MN} = \frac{1}{2} \vec{EB}$ e $\vec{QP} = \frac{1}{2} \vec{EB}$, temos: $\vec{MN} = \frac{1}{2} \vec{EB} \rightarrow 2\vec{MN} = \vec{EB}$,
 e $2\vec{QP} = \vec{EB}$, então $\vec{EB} = \vec{EB} \rightarrow 2\vec{QP} = 2\vec{MN}$, logo $\vec{MN} = \vec{QP}$, ou seja,
 $\vec{MN}$ é paralelo a $\vec{QP}$. Então: $\|\vec{MN}\| = \|\vec{QP}\| \rightarrow \|\vec{MN}\| = \|\vec{QP}\|$
 $\rightarrow \|\vec{MN}\| = \|\vec{QP}\|$ ($\vec{MN}$ e $\vec{QP}$ tem o mesmo comprimento) 0,7

c) Sim, o conjunto é linearmente independente. Como $\vec{GP}$, $\vec{GN}$ e $\vec{GQ}$ não pertencem
a um mesmo plano, já que $\vec{GP}$ e $\vec{GQ}$ compõem lados do cubo, e $\vec{GN}$ compõe
 uma diagonal interna do cubo, o conjunto $\{\vec{GP}, \vec{GN}, \vec{GQ}\}$ é linearmente independente 0,2