Álgebra I: Prova I

(Modelo A)

1. (2.0 pontos) Mostre por indução

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \quad \forall n \geq 1.$

b) $8 \mid (3^{2n} - 1), \quad \forall n \geq 1.$

2. (2.0 pontos) Mostre as afirmações verdadeiras e dê um contra-exemplo para as falsas:

a) $\forall n \in \mathbb{Z}$, se $27 \mid 3 \cdot 5^{99} \cdot n$ então $27 \mid n$.

b) Se a e b são inteiros tais que existem λ e $\mu \in \mathbb{Z}$ tais que

$$a\lambda + b\mu = 3$$

então $\text{mdc}(a, b) = 1$ ou 3.

3. (2.0 pontos) Sejam m e n inteiros, mostre que

$$\text{mdc}(m, n) = \text{mdc}(m - n, n).$$

4. (2.0 pontos) Determine todos os múltiplos de 38 e de 34 cuja diferença seja 10.

5. (2.0 pontos) Considere a sequência de Fibonacci, $F_1 = 1, F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, se $n \geq 2$. Mostre que:

$$F_n \cdot F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}, \qquad n \geq 1.$$