2^a Prova Álgebra 1
21 de maio de 2020

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ____
N^oUSP : ____________________ período
Horário de início __________ horário de término __________

Eu
declaro que esta prova foi feita sem consulta a nenhum meio eletrônico, e que as únicas consultas foram em livros textos físicos.

23 de abril de 2020
Assinatura:

1^a) Questão: (Valor 2 pt) Nesta questão você deve simplesmente dizer se a afirmação é verdadeira ou falsa, cada ítem vale 0,2 pontos, sua nota nesta questão será calculada assim: Seja A= número de respostas certas e B o número de respostas erradas a nota na questão é o $\mathbf{max}\{0.2 \times (A - B), 0\}$. Em particular qualquer ítem não respondido não entra no cálculo da nota. Você pode deixar ítens sem responder.

1. Sejam a e b inteiros não nulos. Então, $\text{mdc}(a, b) = \text{mmc}(a, b)$ se e somente se $a = b$.

2. Dados a e b dois números naturais quaisquer com $b \neq 0$ existe um único par de naturais q e r tais que $a = bq + r$ onde r é um natural menor que b .

3. Se um número inteiro a não é primo, então existem inteiros c e d, que não são múltiplos de a tais que a divide $c \times d$. A recíproca dessa afirmação também é verdadeira.

4. Existe um inteiro a tal que o conjuntos dos números inteiros da forma
$$(2^{542} + 32)X + 359893Y$$
é o conjunto dos inteiros múltiplos de a.

5. Se a equação diofantina $aX^n = b$ com a e b inteiros tem solução e $mdc(a, b) = 1$ então a tem necessariamente que ser 1 ou -1.

6. No anel $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ onde n um natural positivo qualquer, a equação $x^2 + 1 = 0$ tem máximo 2 soluções.

7. 39 divide $114^{76} - 1$

8. No anel dos racionais a equação $aX = b$, onde a e b são inteiros arbitrários tem sempre solução.

9. Se a, b, c e d são inteiros onde b e d são inteiros maiores que zero são tais que os números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são iguais e $mdc(a, b) = mdc(c, d) = 1$ então necessariamente $a = c$.

10. A equação $2x + 3x = 5x$ tem infinitas soluções em $\frac{Z}{nZ}$.

2^a) Questão:

Sejam a, b, m, n inteiros, com m e n maiores que zero. Prove que $a \equiv b(mod\ m)$ se e somente se $an \equiv bn(mod\ mn)$

3^a) Questão:
Seja m um inteiro maior que zero e sejam a e b elementos de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Denote por $\Phi_{a,\ b}(x)$ a função $\Phi_{a,\ b}(x) = ax + b$. Prove que :

- a) $\Phi_{a,\ b} = \Phi_{1,\ b} \circ \Phi_{a,\ 0}$.
- b) $\Phi_{a,\ b} \circ \Phi_{c,\ d} = \Phi_{ac,\ ad+b}$.

4^{a}) Questão:

1. Determinar as soluções inteiras para a equação diofantina,
   $30x + 17y = 300$
2. Determine as soluções naturais, dessa mesma equação.

5^a) Questão:

Prove que existem infinitos primos da forma $3n + 2$.

Bibilografia: Relacione aqui a referência aos livros que utilizou durante a prova.