3^a Prova, Álgebra 1, primeiro semestre de 2021.

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Nome : ______________________________________

N^oUSP : ____________________ período

Coloque o enunciado nas questões que resolver.

Você tem 4 horas para resolver esta prova,

Eu,
declaro que esta prova foi feita sem consulta a nenhum meio eletrônico, e que as únicas consultas foram em livros textos físicos.
Início: Término:
de Julho de 2021
Assinatura:

1^a) Questão: (Valor 2 pt)

Nesta questão sua nota será calculada assim: $(QC - QE).(0,2)$ Onde QC é o número de questão que respondeu acertadamente e QE o número que respondeu e errou. (Questões não respondidas não entram nessa conta).

1. O produto de 5 inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de 120.
2. Seja $\{p_1, \cdots, p_n\}$ um conjunto qualquer de primos da forma $3n+2$, então todos divisores primos de $3 \times (p_1 \times .... \times p_n) + 2$ são da forma $3n+2$.
3. Nos inteiros módulo 17 a equação $x^{17} + 2 = 0$ e a equação $x + 2 = 0$ tem o mesmo conjunto solução.
4. Se n é um inteiro maior que 2 e não é primo então a equação $x^2 = 0$ tem sempre mais de uma solução em $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$.
5. O anel $\mathbb{Z}/(10\mathbb{Z})$ não tem divisores do zero.
6. Não existe nenhum polinômio de grau maior que 1 sobre com coeficientes inteiros cujas raizes são só números primos.
7. Não existe um número inteiro a tal que todos os números inteiros no conjunto $\{t : a < t < a + 2^{2021}\}$ são compostos.
8. O anel $\mathbb{Z}/(123\mathbb{Z})$ não tem divisores do zero.
9. Seja ϕ a função de Euler. Se m e n são naturais quaisquer, então sempre ocorre que $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$.
10. Sabe-se que $a^5 = b^5c$ onde a, b e c são inteiros maiores que zero, podemos concluir que $c = d^5$ para algum inteiro d.

2ª) Questão: (Valor 2 pt)

Vamos estudar a equação $x^2 + bx + c = 0$ em $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ onde p é um número primo, b e c são constantes em $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$.

Primeiro olhemos para $p = 2$ (Observe que nesse caso $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ tem só dois elementos)

1. Mostre que o único caso em que a equação não tem solução é quando $b = c = 1$.

2. Mostre que nos outros casos, ainda com $p = 2$ a solução é única. (observe que para todo elemento x de $\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$ vale $x^2 = x$ e $2x = 0$.)

   A partir de agora assuma que $p > 2$. (Então 2 é invertível em $\mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$.)

3. Mostre que a equação tem solução se e somente se existe $l \in \mathbb{Z}/(p\mathbb{Z})$ tal que $l^2 = b^2 - 4c$.

4. Mostre que no caso do item anterior a equação tem solução única se e somente $l = 0$.

3 [a]) Questão: (Valor 2 pt)

Considere a seguinte equação com coeficientes inteiros, onde $r_n \neq 0$.

$$r_n x^n + r_{n-1} x^{n-1} + \cdots + r_1 x + r_0 = 0$$

Prove que: se $\dfrac{a}{b}$ é uma raiz racional da equação, com $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$, então

$$a \mid r_0 \qquad \text{e} \qquad b \mid r_n.$$

4 ^{a}) Questão: (Valor 2 pt)

1. Prove que a equação $x^2 = 12$ não tem solução no conjunto dos números racionais.

2. Prove que se $n \in N$ e a equação $x^2 = n$ tem solução nos números racionais, então a solução pertence aos inteiros.

3. Prove que se $n, k \in N$ e a equação $x^k = n$ tem solução nos números racionais, então a solução pertence aos inteiros.

5 ^{a}) Questão: (Valor 2 pt)

Resolva os seguintes sistemas de equações diofantinas.

1. $\begin{cases} 2x \equiv 5 (\mathbf{mod} 29) \\ 5x \equiv 2 (\mathbf{mod} 26) \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + 6y = 2 \end{cases}$