

Álgebra I para Licenciatura

1 / 1

Pré-GABARITO - Turma A.

1) MOSTRAR POR INDUÇÃO, QUE $3 \mid 2^N + (-1)^{N+1}$, $\forall N \geq 1$.

PARA TANTO, PRECISAMOS VERIFICAR DUAS PROPRIEDADES:

i) VALE PARA $N=1$.

Se $N=1$, ENTÃO $3 \mid 2^1 + (-1)^{1+1} \Leftrightarrow 3 \mid 3$, OK.

ii) SUPONHA VÁLIDO PARA K , ENTÃO VALE TAMBÉM PARA $K+1$, ONDE $K \in \mathbb{N}$.

Hipótese: $3 \mid 2^K + (-1)^{K+1}$

Tese: $3 \mid 2^{K+1} + (-1)^{K+2}$

BASTA NOTAR, QUE:

$$2^{K+1} + (-1)^{K+2} \Rightarrow \dots$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^K + (-1) \cdot (-1)^{K+1}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^K + (2-3) \cdot (-1)^{K+1}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^K + 2 \cdot (-1)^{K+1} - 3 \cdot (-1)^{K+1}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (2^K + (-1)^{K+1}) - 3 \cdot (-1)^{K+1}$$

MAS POR HIPÓTESE, SEI QUE: $3 \mid 2^K + (-1)^{K+1} \Rightarrow 3 \mid 2(2^K + (-1)^{K+1})$

SEI TAMBÉM QUE: $3 \mid -3(-1)^{K+1}$.

COMO $3 \mid 2(2^K + (-1)^{K+1})$ E $3 \mid -3(-1)^{K+1}$.

Logo $3 \mid 2(2^K + (-1)^{K+1}) - 3(-1)^{K+1}$, OU SEJA,

PORTANTO $3 \mid 2^{K+1} + (-1)^{K+2}$, E SEGUE A TESE.

Kafoma

2) Mostrar que um número inteiro é divisível por 9, se e somente se, a soma de seus dígitos é divisível por 9.

Seja $N \in \mathbb{N}$, onde $N = \sum_{i=0}^M a_i \cdot 10^i$, com $0 \leq a_i \leq 9$.

isto é, $N = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_M \cdot 10^M$, $M \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow N = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_M \cdot 10^M$$

$$10 \equiv (9+1) \Rightarrow N = a_0 + a_1 \cdot (9+1) + a_2 \cdot (9+1)^2 + \dots + a_M \cdot (9+1)^M$$

$$\Rightarrow N = a_0 + 9 \cdot a_1 + a_1 + 9^2 \cdot a_2 + 2 \cdot 9 \cdot a_2 + a_2 \cdot 1^2 + \dots + 9^M \cdot a_M + \sum_{j=1}^{M-1} \binom{M-1}{j} 9^{M-j} \cdot a_j + a_M \cdot 1^M$$

$\Rightarrow N = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_M + 9 \cdot C$, onde C são os múltiplos de 9 que aparecem no desenvolvimento do Binômio Acima. (Note que poderíamos ter resolvido diretamente pelo somatório esta questão).

$$\Rightarrow N = a_0 + a_1 + \dots + a_M + 9 \cdot C$$

Se $9 \mid N$, então $9 \mid a_0 + a_1 + \dots + a_M + 9 \cdot C$,
mas $9 \mid 9C$, Logo $9 \mid a_0 + a_1 + \dots + a_M$.

Analogamente provamos também caso $N \in \mathbb{Z}$.

(Obs: Na prova da Turma B, resolveremos diretamente pelo somatório)

3) DETERMINAR A MAIOR POTÊNCIA DE 12 QUE DIVIDE 100!.

BASTA NOTAR QUE $100! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 100$.

OUERO A MAIOR POTÊNCIA DE 12 QUE DIVIDE 100!, I.E., DETERMINAR MAIOR N , TAL QUE $12^N \cdot C = 100!$.

NOTEMOS PRIMEIRAMENTE, QUE $12^N = 3^N \cdot (2^2)^N = 3^N \cdot 4^N$.

PARA FACILITAR NOSSAS CONTAS, VAMOS CONSIDERAR A MAIOR POTÊNCIA QUE LIMITA O PRODUTÓRIO DE 100!. NESSE CASO COMO $4 > 3$, ENTÃO VAMOS ANALISAR AS POTÊNCIAS DE 4.

SENDO ASSIM: $100! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 100$.

$$\Rightarrow 100! = 4^{25} \times (1 \times 2 \times 3 \times \textcircled{1} \times 5 \times 6 \times 7 \times \textcircled{2} \times \dots \times 99 \times \textcircled{25})$$

NOTE QUE MESMO TIRANDO TODOS OS MÚLTIPLOS DE QUATRO, AINDA SOBRAVAM ALGUNS, TENDO EM SUA RAÍZ 2 QUATROS.

SENDO ASSIM CONTANDO ELAS, TEMOS:

$$\Rightarrow 100! = 4^{25} \times 4^6 \times (1 \times 2 \times \dots \times 25) \times \dots \times 100$$

VEJA QUE: $4 \times 4 = 16$; $4 \times 4 \times 2 = 32$, ...; $4 \times 4 \times 6 = 96$.

CONTANDO AINDA PODEMOS CONTAR COM 3 QUATROS.

VEJAMOS QUE: $4 \times 4 \times 4 = 64$; $4 \times 4 \times 4 \times 2 = 128$, PASSOU!.

PORTANTO FICAMOS COM: $100! = 4^{25} \cdot 4^6 \cdot 4 \times (1 \times 2 \times \dots \times 25)$

$$\Rightarrow 100! = 4^{32} \cdot (1 \times 2 \times \dots \times 25)$$

LOGO A MAIOR POTÊNCIA SEJA $N = 32$

EXERCÍCIO EXTRA: QUAL A MAIOR POTÊNCIA DE 3, QUE DIVIDE 100!.

NOVAMENTE, CONTINUANDO A MESMA LÓGICA, PODEMOS PERCEBER, QUE:

$$100! = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{UM TRÊS}}}{3^{33}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{DOIS TRÊS}}}{3^{11}} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TRÊS TRÊS}}}{3^3} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{QUATRO TRÊS}}}{3} \cdot (1 \times 2 \times 4 \times \dots \times 100), \text{ OU SEJA, } 3^{48}$$

4) Resolvido em "Mais soluções do Vinicius..."

5) Seja $a \in \mathbb{Z}$. Usando o axioma dos números inteiros mostrar que $a \cdot 0 = 0$.

Sei que: $a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$, (el. neutro)

$$\Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 + (a - a), \text{ (el. oposto)}$$

$$\Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot 0 + a - a$$

$$\Rightarrow a \cdot 0 = a(0 + 1) - a, \text{ (distributiva)}$$

$$\Rightarrow a \cdot 0 = a \cdot (1) - a$$

$$\Rightarrow a \cdot 0 = a - a, \text{ (} a \cdot (1) = a \text{)}$$

$$\Rightarrow a \cdot 0 = 0, \text{ (el. oposto).}$$

6) Usando o Algoritmo de Euclides encontrar inteiros r e s tais que $93r + 81s = 3$.

$$\begin{array}{r} 93 \overline{) 81} \end{array} \Rightarrow 93 = 81 \times 1 + 12 \Leftrightarrow 12 = 93 - 1 \times 81 \text{ (I)}$$

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 81} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \overline{) 12} \end{array} \Rightarrow 81 = 12 \times 6 + 9 \Leftrightarrow 9 = 81 - 12 \times 6 \text{ (II)}$$

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 12} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 9} \end{array} \Rightarrow 12 = 9 \times 1 + 3 \Leftrightarrow 3 = 12 - 9 \times 1$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 9} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \overline{) 3} \end{array}$$

Portanto temos:

$$\Rightarrow 3 = 12 - 9 \times 1$$

$$\text{(I) e (II)} \Rightarrow 3 = 93 - 1 \times 81 - (81 - (93 - 1 \times 81) \times 6)$$

$$\Rightarrow 3 = 93 - 1 \times 81 - 1 \times 81 + 6 \times 93 - 6 \times 81$$

$$\Rightarrow 3 = 7 \times 93 - 8 \times 81 //$$

Logo $r = 7$ e $s = -8$.

4) Mostrar que $N^5 - N$ é divisível por 30 para todo inteiro N .

Antes de tudo, note a dificuldade de fazer este exercício pelo Teorema da Divisão, ou por indução. No primeiro seria necessário analisar 30 restos! e por indução teria de considerar casos em que N é negativo fazendo uma correlação com N positivo.

Faremos de uma maneira mais breve.

Note que $N^5 - N = N(N^4 - 1) = N(N^2 - 1)(N^2 + 1)$
ou seja, $N^5 - N = N(N-1)(N+1)(N^2+1)$. Como $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, basta mostrar então que 2, 3 e 5 dividem $N^5 - N$.

1º caso) $2 \mid N^5 - N$, ou $2 \mid N(N-1)(N+1)(N^2+1)$, isso vale pois sempre teremos 2 consecutivos.

2º caso) $3 \mid N^5 - N$, ou $3 \mid (N-1)N(N+1)(N^2+1)$, também vale

pois temos 3 consecutivos.

3º caso) $5 \mid N^5 - N$, ou $5 \mid (N-1)N(N+1)(N^2+1)$. Para tanto podemos utilizar o Teorema da Divisão.

sendo assim, devemos considerar 5 casos: $N = 5q + R$; $0 \leq R < 5$

Se $R=0$, então $N=5q$ OK.

Se $R=1$, então $N=5q+1 \Rightarrow N-1=5q$ OK

Se $R=2$, então $N=5q+2 \Rightarrow N^2+1=5q^2+4q+1+1=5q^2+4q+2$ OK

Se $R=3$, então $N=5q+3 \Rightarrow N^2+1=5q^2+9q+1+1=5q^2+9q+2$ OK

Se $R=4$, então $N=5q+4 \Rightarrow N+1=5q+5=5(q+1)$ OK

PRÉ-GABARITO - TURMA B.

1) Resolvido em "Mais Soluções do Vinícius..."

2) MOSTRAR que um número inteiro é divisível se, e somente se, a soma ALTERNADA de seus dígitos é divisível por 11.

Seja $N = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \dots + a_m \cdot 10^m$, onde $m \in \mathbb{N}$ e $0 \leq |a_k| < 9$.

ou seja, $N = \sum_{i=0}^m a_i \cdot 10^i$. Fazemos $10^i = (11-1)^i$.

Note que $(11-1)^i = 11^i + 11C + (-1)^i$, pelo Binômio.

Seja assim, ficamos: $N = \sum_{i=0}^m a_i \cdot (11^i + 11C + (-1)^i)$

$$\Rightarrow N = \sum_{i=0}^m a_i \cdot 11^i + 11 \cdot \sum_{i=0}^m C \cdot a_i + \sum_{i=0}^m a_i \cdot (-1)^i$$

$$\Rightarrow N = 11^m \cdot \sum_{i=0}^m a_i + 11 \cdot \sum_{i=0}^m C \cdot a_i + \sum_{i=0}^m a_i \cdot (-1)^i$$

$$\text{Se } 11 \mid N, \text{ então } 11 \mid 11^m \cdot \sum_{i=0}^m a_i + 11 \cdot \sum_{i=0}^m C \cdot a_i + \sum_{i=0}^m a_i \cdot (-1)^i$$

$$\text{Como } 11 \mid 11^m \cdot \sum_{i=0}^m a_i \text{ e } 11 \mid 11 \cdot \sum_{i=0}^m C \cdot a_i, \text{ então } 11 \mid \sum_{i=0}^m a_i \cdot (-1)^i //$$

Note que $\sum_{i=0}^m a_i \cdot (-1)^i$ é a soma ALTERNADA.

3) Determinar o maior potência de 18 que divide $100!$.

Análogo ao ex 2) da Turma A.

A maior potência será 18^{24} . (considere a maior potência 3^2).

4) Resolvido com "Mais Solução do Vinícius..."

5) Sejam a e b inteiros. Usando os Axiomas dos números inteiros mostrar que $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$.

Mostraremos primeiro, que: $(-a) \cdot b = a \cdot (-b)$.

$$\begin{aligned} \text{Sejam assim, temos: } & (-a) \cdot b = (-a) \cdot b + 0 \quad ; \text{ (El, neutro)} \\ \Leftrightarrow & (-a) \cdot b = (-a) \cdot b + a - a \quad ; \text{ (El, oposto)} \\ \Leftrightarrow & (-a) \cdot b = (-a)(b+1) + a \quad ; \text{ (Distributiva)} \\ \Leftrightarrow & (-a) \cdot b = a \cdot (-1)(b+1) + a \quad ; \text{ (a} \cdot (-1) = -a) \\ \Leftrightarrow & (-a) \cdot b = a(-b-1) + a \\ \Leftrightarrow & (-a) \cdot b = a(-b-1+1) \quad ; \text{ (Distributiva)} \\ \Leftrightarrow & (-a) \cdot b = a(-b) // \end{aligned}$$

Mostraremos agora que: $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$.

$$\begin{aligned} \text{Sejam assim, temos: } & (-a) \cdot b = (-1) \cdot a \cdot b \quad ; \text{ (} (-a) = -a) \\ \Leftrightarrow & (-a) \cdot b = -(a \cdot b) \quad ; \text{ (} (-1) \cdot x = -x) // \end{aligned}$$

1 -

6) Usando o Algoritmo de Euclides encontrar inteiros r e s tais que $41r + 128s = 1$.

Análogo ao ex 6) da turma A.

Resolução: $r = 25$ e $s = -8$.

7) O mesmo que o ex 7) da turma A.