GABARITO P2.

Limites. Calcule caso exista

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-a^2y^2}$, a ≥ 2.

   Solução

   Considere os caminhos contínuos em $(0,0)$ dados por

   $$\gamma(t) = (t,0) \quad \text{e} \quad \beta(t) = (t^2+at, t)$$

   fazendo a composição com a função do limite, respectivamente obtemos

   $$\lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0$$

   e

   $$\lim_{t\to 0} \frac{(t^2+at)t^2}{(t^2+at)^2 - a^2t^2} = \frac{t+a}{t+2a} = \frac{1}{2}$$

   Como os limites são diferentes então o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2-a^2y^2}$ não existe.

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{a^2x^2-y^2}$, a ≥ 2.

   Solução

   Considere os caminhos contínuos em $(0,0)$ dados por

   $$\gamma(t) = (t,0) \quad \text{e} \quad \beta(t) = (t, t^2+at)$$

   fazendo a composição com a função do limite, respectivamente obtemos

   $$\lim_{t\to 0} \frac{0}{a^2t^2} = 0$$

   e

   $$\lim_{t\to 0} \frac{t^2(t^2+at)}{a^2t^2 - (t^2+at)^2} = -\frac{t+a}{t+2a} = -\frac{1}{2}$$

   Como os limites são diferentes então o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{a^2x^2-y^2}$ não existe.

3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{a^2y^2-x^2}$, $a \geq 2$.

   Solução

   Considere os caminhos contínuos em $(0,0)$ dados por

$$\gamma(t) = (t,0) \quad \text{e} \quad \beta(t) = (t^2+at, t)$$

   fazendo a composição com a função do limite, respectivamente obtemos

$$\lim_{t\to 0} \frac{0}{-t^2} = 0$$

   e

$$\lim_{t\to 0} \frac{(t^2+at)t^2}{a^2t^2-(t^2+at)^2} = -\frac{t+a}{t+2a} = -\frac{1}{2}$$

   Como os limites são diferentes então o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{a^2y^2-x^2}$ não existe.

4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{y^2-a^2x^2}$, a ≥ 2.**Solução**

   Considere os caminhos contínuos em $(0,0)$ dados por

$$\gamma(t) = (t,0) \quad \text{e} \quad \beta(t) = (t, t^2+at)$$

   fazendo a composição com a função do limite, respectivamente obtemos

$$\lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0$$

   e

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2(t^2+at)}{(t^2+at)^2-a^2t^2} = \frac{t+a}{t+2a} = \frac{1}{2}$$

   Como os limites são diferentes então o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{y^2-a^2x^2}$ não existe.

Derivadas parciais.

1. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{a^2x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3a^2x^4y + 3x^2y^3 - 2a^2x^4y}{(a^2x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y(a^2x^2+3y^2)}{(a^2x^2+y^2)^2}$$

e por definição a derivada parcial com relação a x de uma função no ponto $(x_0, y_0) = (0,0)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Agora calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{a^2x^5 + x^3y^2 - 2x^3y^2}{(a^2x^2+y^2)^2} = \frac{x^3(a^2x^2-y^2)}{(a^2x^2+y^2)^2}$$

e por definição a derivada parcial com relação a y de uma função no ponto $(x_0, y_0) = (0,0)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

2. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+a^2y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^4y + 3a^2x^2y^3 - 2x^4y}{(x^2+a^2y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2+3a^2y^2)}{(x^2+a^2y^2)^2}$$

e por definição a derivada parcial com relação a x de uma função no ponto $(x_0, y_0) = (0,0)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Analogamente calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^5 + a^2x^3y^2 - 2a^2x^3y^2}{(x^2+a^2y^2)^2} = \frac{x^3(x^2-a^2y^2)}{(x^2+a^2y^2)^2}$$

e por definição a derivada parcial com relação a y de uma função no ponto $(x_0, y_0) = (0,0)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

3. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{a^2x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{a^2x^2y^3 + y^5 - 2a^2x^2y^3}{(a^2x^2+y^2)^2} = \frac{y^3(y^2-a^2x^2)}{(a^2x^2+y^2)^2}$$

e por definição a derivada parcial com relação a x de uma função no ponto $(x_0, y_0) = (0,0)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Analogamente calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3a^2x^3y^2 + 3xy^4 - 2xy^4}{(a^2x^2+y^2)^2} = \frac{xy^2(3a^2x^2+y^2)}{(a^2x^2+y^2)^2}$$

e por definição a derivada parcial com relação a y de uma função no ponto $(x_0, y_0) = (0,0)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

4. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+a^2y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^2y^3 + a^2y^5 - 2x^2y^3}{(x^2+a^2y^2)^2} = \frac{y^3(a^2y^2 - x^2)}{(x^2+a^2y^2)^2}$$

e por definição a derivada parcial com relação a x de uma função no ponto $(x_0, y_0) = (0,0)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Agora calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3x^3y^2 + 3a^2xy^4 - 2a^2xy^4}{(x^2+a^2y^2)^2} = \frac{xy^2(a^2y^2 + 3x^2)}{(x^2+a^2y^2)^2}$$

e por definição a derivada parcial com relação a y de uma função no ponto $(x_0, y_0) = (0,0)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

5. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+a^2y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2a^2xy^4}{(x^2+a^2y^2)^2}$$

e por definição a derivada parcial com relação a x de uma função no ponto $(x_0, y_0) = (0,0)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Agora calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^4y}{(x^2+a^2y^2)^2}$$

e por definição a derivada parcial com relação a y de uma função no ponto $(x_0, y_0) = (0,0)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

6. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{a^2x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^4}{(a^2x^2+y^2)^2}$$

e por definição a derivada parcial com relação a x de uma função no ponto $(x_0, y_0) = (0,0)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Analogamente calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2a^2x^4y}{(a^2x^2+y^2)^2}$$

e por definição a derivada parcial com relação a y de uma função no ponto $(x_0, y_0) = (0,0)$ é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Diferenciabilidade.

Definição. Sejam $f : A \to \mathbb{R}$, A aberto de $\mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que f é diferenciável em (x_0, y_0) se e somente se existirem reais a e b tais que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Sabe-se que se a função é diferenciável no ponto (x_0, y_0), então $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

1. A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{a^2x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é diferenciavel em $(0, 0)$? Use a definição de diferencibilidade para justificar a sua resposta.

Solução. Devemos verificar se existem derivadas parciais no ponto $(0, 0)$ o que por definição de **derivada parcial em um ponto** de uma função é

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Então sejam $a = 0$ e $b = 0$. Usando a definição de diferenciabilidade onde $(x_0, y_0) = (0, 0)$ obtemos

$$E(h, k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h, k)}{\|(h, k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{hk^2}{a^2h^2+k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk^2}{(a^2h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} \qquad (\star)$$

Para verificar que o limite não existe consideramos a curva contínua $\gamma(t) = (t, t)$ fazemos a composição dela com a função do limite acima $(\star)$ e calculando novamente o limite, desta vez quando t tende a zero, obtemos respectivamente

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3}{(a^2t^2 + t^2)\sqrt{t^2 + t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{(a^2 + 1)\, t^2 \sqrt{2}\ |t|}$$

Calculando os limites laterais no ponto 0 obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} \frac{t^3}{(a^2+1)\ t^2\ \sqrt{2}\ |t|} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{t^3}{(a^2+1)\ t^2\ \sqrt{2}\ t} \qquad\qquad t>0 \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{t}{(a^2+1)\sqrt{2}\ t} \\ &= \frac{1}{(a^2+1)\sqrt{2}} > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^-} \frac{t^3}{(a^2+1)\ t^2\ \sqrt{2}\ |t|} &= \lim_{t\to 0^-} -\frac{t^3}{(a^2+1)\ t^2\ \sqrt{2}\ t} \qquad\qquad t<0 \\ &= \lim_{t\to 0^-} -\frac{t}{(a^2+1)\sqrt{2}t} \\ &= \frac{-1}{(a^2+1)\sqrt{2}} < 0. \end{aligned}$$

Sendo os limites laterais em 0 diferentes

$$\frac{1}{(a^2+1)\sqrt{2}} \neq \frac{-1}{(a^2+1)\sqrt{2}}$$

o limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{hk^2}{a^2h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

não existe. Portanto não satisfaz a definição de diferenciabilidade e a função não é diferenciável.

Os cálculos para para os casos (2), (3) e (4) são analogos ao anterior (1). chegando na mesma conclusão.

2. A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+a^2y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciavel em $(0,0)$? Use a definição de diferencibilidade para justificar a sua resposta.

3. A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{a^2x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciavel em $(0,0)$? Use a definição de diferencibilidade para justificar a sua resposta.

4. A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+a^2y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciavel em $(0,0)$? Use a definição de diferencibilidade para justificar a sua resposta.

5. A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+a^2y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciavel em $(0,0)$? Use a definição de diferencibilidade para justificar a sua resposta.

Solução. Devemos verificar se existem derivadas parciais no ponto $(0,0)$ o que por definição de **derivada parcial em um ponto** de uma função é

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Então sejam $a = 0$ e $b = 0$. Usando a definição de diferenciabilidade onde $(x_0, y_0) = (0,0)$ obtemos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - ah - bk}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3k}{h^2+a^2k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Observe que

$$\frac{\frac{h^3k}{h^2+a^2k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = k.\frac{h^2}{h^2+a^2k^2}.\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

sendo

$$0 \leq \frac{h^2}{h^2+a^2k^2} \leq 1 \text{ para todo } (h,k) \neq (0,0)$$

e

$$-1 \leq \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2k^2}} \leq 1 \text{ para todo } (h,k) \neq (0,0)$$

e

$$\lim_{k\to 0} k = 0.$$

Portanto segue do Corolario do Teorema do Confronto que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} k.\frac{h^2}{h^2+a^2k^2}.\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

portanto satisfaz a definição de diferenciabilidade e a função é diferenciável.

Os seguintes casos se resolvem similarmente chegando na mesma conclusão.

6. A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+a^2y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciavel em $(0,0)$? Use a definição de diferencibilidade para justificar a sua resposta.

7. A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+a^2y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciavel em $(0,0)$? Use a definição de diferencibilidade para justificar a sua resposta.

8. A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{a^2x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciavel em $(0,0)$? Use a definição de diferencibilidade para justificar a sua resposta.

Máximos e mínimos locais. Estude com relação a máximos e mínimos a função

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2a^2x^2 - 2a^2y^2$, $a \geq 2$

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4a^2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4a^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4a^2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4a^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0$$

Aplicando a Condição necesária para extremantes locais. Isto é $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ logo

$$4x^3 - 4a^2x = 4x(x^2 - a^2) = 4x(x-a)(x+a) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \quad x = a, \quad x = -a.$$
$$4y^3 - 4a^2y = 4y(y^2 - a^2) = 4y(y-a)(y+a) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0, \quad y = a, \quad y = -a.$$

portanto são candidatos a extremos locais os pontos $(0,0)$, $(0,a)$, $(0,-a)$, $(a,0)$, $(-a,0)$, (a,a), $(a,-a)$, $(-a,a)$, $(-a,-a)$. Agora usamos o teorema do Hessiano $H(x,y)$ que classifica os candidatos a extremantes locais. Lembrando que o Hessiano se define como

$$H(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -4a^2 < 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -4a^2 < 0 \end{array} \quad \text{e} \quad H(0,0) = (-4a^2)(-4a^2) > 0$$

então $(0,0)$ é ponto de máximo local de f.

$$\begin{array}{lllll} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,a) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-a) & = & -4a^2 < 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,a) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-a) & = & 8a^2 > 0 \end{array} \quad \text{e} \quad H(0,a) = H(0,-a) = (-4a^2)(8a^2) < 0$$

$$\begin{array}{lllll} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,0) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-a,0) & = & 8a^2 > 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,0) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-a,0) & = & -4a^2 < 0 \end{array} \quad \text{e} \quad H(a,0) = H(-a,0) = (8a^2)(-4a^2) < 0$$

então $(0,a)$, $(0,-a)$, $(a,0)$ e $(-a,0)$ são pontos de sela de f.

$$\begin{array}{lllllllll} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,a) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,-a) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-a,a) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-a,-a) & = & 8a^2 > 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,a) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a.-a) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-a,a) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-a,-a) & = & 8a^2 > 0 \end{array}$$

e

$$H(a,a) = H(a,-a) = H(-a,a) = H(-a,-a) = (8a^2)(8a^2) > 0,$$

assim (a,a), $(a,-a)$, $(-a,a)$ e $(-a,-a)$ são pontos de mínimo locais de f.

2. $f(x,y) = x^{2n} + y^{2n} - nx^2 - ny^2$, $n \geq 3$

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2nx^{2n-1} - 2nx \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2n(2n-1)x^{2n-2} - 2n \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ny^{2n-1} - 2ny \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2n(2n-1)y^{2n-2} - 2n \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Aplicando a Condição necesária para extremantes locais. Isto é $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ logo

$$2nx(x^{2n-2} - 1) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1.$$
$$2ny(y^{2n-2} - 1) = 0 \;\Rightarrow\; y = 0, \quad y = 1, \quad y = -1.$$

portanto são candidatos a extremos locais os pontos $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$. Agora usamos o teorema do Hessiano $H(x,y)$ que classifica os candidatos a extremantes locais.

$$\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2n < 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2n < 0 \end{array} \quad \text{e} \quad H(0,0) = (-2n)(-2n) > 0$$

então $(0,0)$ é ponto de máximo local de f.

$$\begin{array}{lllll} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1) & = & -2n < 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-1) & = & 4n(n-1) > 0 \end{array} \quad \text{e} \quad H(0,1) = H(0,-1) = (-2n)(4n)(n-1) < 0$$

$$\begin{array}{lllll} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) & = & 4n(n-1) > 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,0) & = & -2n < 0 \end{array} \quad \text{e} \quad H(1,0) = H(-1,0) = (4n)(n-1)(-2n) < 0$$

então $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$ e $(-1,0)$ são pontos de sela de f.

$$\begin{array}{lllllllll} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) & = & 4n(n-1) > 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,1) & = & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) & = & 4n(n-1) > 0 \end{array}$$

e

$$H(1,1) = H(1,-1) = H(-1,1) = H(-1,-1) = (4n(n-1))^2 > 0,$$

assim $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$ são pontos de mínimo locais de f.

3. $f(x,y) = x^{2n} + y^{2n} - n2^{2n-2}x^2 - n2^{2n-2}y^2$, $n = \{3,4\}$

Solução

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2nx^{2n-1} - 2n2^{2n-2}x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2n(2n-1)x^{2n-2} - 2^{2n-1}n \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ny^{2n-1} - 2n2^{2n-2}y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2n(2n-1)y^{2n-2} - 2^{2n-1}n \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Aplicando a Condição necesária para extremantes locais. Isto é $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ logo

$$\begin{aligned} 2nx(x^{2n-2} - 2^{2n-2}) = 0 \quad &\Rightarrow \quad x = 0, \quad x = 2, \quad x = -2. \\ 2ny(y^{2n-2} - 2^{2n-2}) = 0 \quad &\Rightarrow \quad y = 0, \quad y = 2, \quad y = -2. \end{aligned}$$

portanto são candidatos a extremos locais os pontos $(0,0)$, $(0,2)$, $(0,-2)$, $(2,0)$, $(-2,0)$, $(2,2)$, $(2,-2)$, $(-2,2)$, $(-2,-2)$. Agora usamos o teorema do Hessiano $H(x,y)$ que classifica os candidatos a extremantes locais.

$$\begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2^{2n-1}n < 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2^{2n-1}n < 0 \end{matrix} \quad \text{e} \quad H(0,0) = (-2^{2n-1}n)(-2^{2n-1}n) > 0$$

então $(0,0)$ é ponto de máximo local de f.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-2) &= &-2^{2n-1}n < 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,2) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-2) &= &\,2^{2n-1}n(2n-2) > 0 \end{aligned}$$

$$\text{e} \quad H(0,2) = H(0,-2) = (-2^{2n-1}n)(2^{2n-1}n(2n-2)) < 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,0) &= &\,2^{2n-1}n(2n-2) > 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,0) &= &-2^{2n-1}n < 0 \end{aligned}$$

$$\text{e} \quad H(2,0) = H(-2,0) = -(2^{2n-1}n)^2(2n-2) < 0$$

então $(0,2)$, $(0,-2)$, $(2,0)$ e $(-2,0)$ são pontos de sela de f.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-2) = 2^{2n-1}n(2n-2) > 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,2) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,-2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,-2) = 2^{2n-1}n(2n-2) > 0
\end{aligned}$$

e

$$H(2,2) = H(2,-2) = H(-2,2) = H(-2,-2) = (2^{2n-1}n(2n-2))^2 > 0,$$

assim $(2,2)$, $(2,-2)$, $(-2,2)$ e $(-2,-2)$ são pontos de mínimo locais de f.

4. $f(x,y) = x^6 + y^6 - 3^5x^2 - 3^5y^2$,

Solução

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 6x^5 - 2(3^5)x & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 30x^4 - 2(3^5) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 0\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 6y^5 - 2(3^5)y & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 30y^4 - 2(3^5) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 0
\end{aligned}$$

Aplicando a Condição necesária para extremantes locais. Isto é $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ logo

$$\begin{aligned}
6x^5 - 2(3^5)x = 6x(x-3)(x+3)(x^2+3^2) = 0 &\Rightarrow x = 0, \quad x = 3, \quad x = -3.\\
6y^5 - 2(3^5)y = 6y(y-3)(y+3)(y^2+3^2) = 0 &\Rightarrow y = 0, \quad y = 3, \quad y = -3.
\end{aligned}$$

portanto são candidatos a extremos locais os pontos $(0,0)$, $(0,3)$, $(0,-3)$, $(3,0)$, $(-3,0)$, $(3,3)$, $(3,-3)$, $(-3,3)$, $(-3,-3)$. Agora usamos o teorema do Hessiano $H(x,y)$ que classifica os candidatos a extremantes locais.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= -2(3^5) < 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= -2(3^5) < 0
\end{aligned}$$

$$\text{e} \quad H(0,0) = (-2(3^5))^2 > 0$$

então $(0,0)$ é ponto de máximo local de f.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,3) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-3) = -2(3^5) < 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,3) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-3) = 8(3^5) > 0
\end{aligned}$$

$$\text{e} \quad H(0,3) = H(0,-3) = -16(3^{10}) < 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3,0) = 8(3^5) > 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,0) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-3,0) = -2(3^5) < 0
\end{aligned}$$

$$\text{e} \quad H(3,0) = H(-3,0) = -16(3^{10}) < 0$$

então $(0,3)$, $(0,-3)$, $(3,0)$ e $(-3,0)$ são pontos de sela de f.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,3) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,-3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3,3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-3,-3) = 8(3^5) > 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,3) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(3,-3) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-3,3) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-3,-3) = 8(3^5) > 0
\end{aligned}$$

e

$$H(3,3) = H(3,-3) = H(-3,3) = H(-3,-3) = (8(3^5))^2 > 0,$$

assim $(3,3)$, $(3,-3)$, $(-3,3)$ e $(-3,-3)$ são pontos de mínimo locais de f.

Máximos e mínimos condicionais

1. Estude com relação a máximos e mínimos a função $f(x,y) = ax + by$ com a restrição $a^2x^2 + y^2 = 1$. $a > 0$ e $b > 0$

   Solução

   Aplicando o método de multiplicadores de Lagrange

   $\nabla f = \lambda \nabla g$ sendo $g(x,y) = a^2x^2 + y^2 - 1 = 0$

   $$\begin{array}{c} (a,b) = \lambda(2a^2x, 2y) \\ a^2x^2 + y^2 = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x = \frac{1}{2\lambda a} \\ y = \frac{b}{2\lambda} \end{array}$$

   substituindo os valores de x e y em g obtemos $\lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+b^2}$, assim

   $$\begin{array}{c} x = \frac{1}{a\sqrt{1+b^2}} \\ y = \frac{b}{2\sqrt{1+b^2}} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} x = -\frac{1}{a\sqrt{1+b^2}} \\ y = -\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \end{array}$$

   pelo Teorema de Weierstrass $(\frac{1}{a\sqrt{1+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{1+b^2}})$ é ponto de máximo e $(-\frac{1}{a\sqrt{1+b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{1+b^2}})$ é ponto de mínimo.

2. Estude com relação a máximos e mínimos a função $f(x,y) = ax + by$ com a restrição $x^2 + b^2y^2 = 1$. $a > 0$ e $b > 0$

   Solução

   Aplicando o método de multiplicadores de Lagrange

   $\nabla f = \lambda \nabla g$ onde $g(x,y) = a^2x^2 + y^2 - 1 = 0$

   $$\begin{array}{c} (a,b) = \lambda(2x, 2b^2y) \\ a^2x^2 + y^2 = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x = \frac{a}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{2b\lambda} \end{array}$$

   substituindo os valores de x e y em g obtemos $\lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+a^2}$, assim

   $$\begin{array}{c} x = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \\ y = \frac{1}{b\sqrt{1+a^2}} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} x = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \\ y = -\frac{1}{b\sqrt{1+a^2}} \end{array}$$

   pelo Teorema de Weierstrass $(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, \frac{1}{b\sqrt{1+a^2}})$ é ponto de máximo e $(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, -\frac{1}{b\sqrt{1+a^2}})$ é ponto de mínimo.