## $3^a$ Prova de Álgebra Linear MAT-122, Turma A

1. *(2,5 pontos)* Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ e $G : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ transformações lineares tais que

$$[T]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [G]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

onde

$$B = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\} \quad \text{e} \quad C = \{1, 1+x, x+x^2\}.$$

Determine base de $Ker\, T \circ G$. Seja $H = 2(T \circ G) + I$, determine $[H]_C^{can}$, onde *can* é a base canônica $\{1, x, x^2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$.

2. *(2,5 pontos)* Determine uma matriz inversível $M$ tal que $M^{-1}AM$ seja uma matriz diagonal se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. *(2 pontos)* Determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

a) Sejam $V$ um espaço vetorial, $T : V \to V$ um operador linear, $u$ um autovetor de $T$ associado ao autovalor $\lambda$ e $v$ um autovetor de $T$ associado ao autovalor $\mu$. Se $\lambda = \mu$, então $u - v$ é autovetor de $T$ associado ao autovalor 0.

b) Se $T : P_7(\mathbb{R}) \to P_7(\mathbb{R})$ é definida por $T(p) = p'$, então existe uma base de $P_7(\mathbb{R})$ tal que a matriz de $T$ em relação desta base é inversível.

4. *(3 pontos)* Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão finita e com produto interno. Seja $W$ um subespaço de $V$ e seja $T : V \to V$ definida por $T(v) = proj_W(v)$, a projeção ortogonal de $v$ em $W$.

a) Prove que $T$ é uma transformação linear.

b) Prove que $T^2 = T$.

c) Prove que $KerT = W^{\perp}$ and $ImT = W$.