# MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear

## 1ª Prova - 13/09/2018

Nome: ______________________

Nº USP: ______________________

| Questão | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| Nota | |

**Atenção:**

1 - Leia os enunciados com atenção!

2 - Justifique cuidadosamente todas as suas afirmações.

3 - Boa prova!

1. **(2,5)** Usando operações elementares na matriz aumentada do sistema linear abaixo, justifique para quais valores de $a$ e $b$ o sistema não tem solução, tem exatamente uma solução e tem infinitas soluções. Encontre as soluções nos casos em que existirem.

$$\begin{cases} 3x + 7y + 6z = -1 \\ x + 2y + z = -1 \\ 3x + 6y + (a^2+2)z = b-1 \end{cases}$$

A matriz aumentada do sistema é:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & a^2+2 & b-1 \end{array}\right] \xrightarrow{L1 \leftrightarrow L2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & a^2+2 & b-1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} L_2 \leftrightarrow L2-3L1 \\ \longleftrightarrow \\ L_3 \leftrightarrow L3-3L1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & b+2 \end{array}\right].$$

(1) Se $a^2-1=0$ e $b+2 \neq 0$ o sistema é incompatível.

(2) Se $a^2-1=0$ e $b+2=0$ o sistema tem infinitas soluções.

$x + 2y + z = -1$     $y = 2-3z$

$y + 3z = 2$     $x = -1-2y-z$

$= -1-2(2-3z)-z$

Assim, as soluções são    $x = -5+5z$

$(-5+5t,\ 2-3t,\ t),\ t \in \mathbb{R}$

(3) Se $a \neq \pm 1$ então o sistema tem uma única solução qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$:

$z = \dfrac{b+2}{a^2-1}$    $x = -5+5\cdot\left(\dfrac{b+2}{a^2-1}\right)$ e $y = 2-\dfrac{3(b+2)}{a^2-1}$

A única sol. é:

$$\left(-5+5\left(\frac{b+2}{a^2-1}\right),\ 2-\frac{3(b+2)}{a^2-1},\ \frac{b+2}{a^2-1}\right).$$

2. **(2,5)** Seja $A$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 7 \\ 3 & 9 & 11 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine a inversa de $A$.

(b) Determine uma matriz $X \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $AX = B$, onde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Vamos obter $A^{-1}$ usando o "método prático"!

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 11 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L3-3L1}{\overset{L2-2L1}{\longleftrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{2}L3}{\longleftrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right] L1 \leftrightarrow L1-3L2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\underset{\longleftrightarrow}{L2 \leftrightarrow L2-L3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right]$$

Assim $A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

(b) Queremos $X$ tal que $AX = B$.

Logo $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$\quad\quad \|$ propriedade associativa

$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \implies X = A^{-1}B$.

Logo $X = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

3. **(2,0)**

(a) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz tal que $A^4 = 0$, onde 0 é a matriz nula $n \times n$. Mostre que $I - A$ é inversível e expresse a inversa de $I - A$ em termos da matriz $A$. (Aqui $I$ indica a matriz identidade $n \times n$.)

(b) Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ r & s & t \\ x & y & z \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $\det A = 10$, determine

$$\det \begin{bmatrix} a+r+x & x & 2a \\ b+s+y & y & 2b \\ c+t+z & z & 2c \end{bmatrix}.$$

**Justifique todas as passagens.**

(a) $I - A^4 = (I-A)(A^3 + A^2 + A + I)$

Como $A^4 = 0$, vale que

$I = (I-A)(A^3+A^2+A+I)$.

Logo, $I-A$ é inversível e

$(I-A)^{-1} = A^3+A^2+A+I$.

(b) $\det \begin{bmatrix} a+r+x & x & 2a \\ b+s+y & y & 2b \\ c+t+z & z & 2c \end{bmatrix} =$

$\underbrace{\det \begin{bmatrix} a & x & 2a \\ b & y & 2b \\ c & z & 2c \end{bmatrix}}_{=0}$ (colunas proporcionais) $+ \det \begin{bmatrix} r & x & 2a \\ s & y & 2b \\ t & z & 2c \end{bmatrix} + \underbrace{\det \begin{bmatrix} x & x & 2a \\ y & y & 2b \\ z & z & 2c \end{bmatrix}}_{=0}$ ↳ colunas iguais

$= \det \begin{bmatrix} r & x & 2a \\ s & y & 2b \\ t & z & 2c \end{bmatrix} = 2 \det \begin{bmatrix} r & x & a \\ s & y & b \\ t & z & c \end{bmatrix}$

$= -2 \det \begin{bmatrix} r & a & x \\ s & b & y \\ t & c & z \end{bmatrix} = +2 \det \begin{bmatrix} a & r & x \\ b & s & y \\ c & t & z \end{bmatrix} = 2 \det A = \det A^t$

trocar col 2 e col 3 — trocar col 2 e col 1

$= 20$

4. **(3,0)** Decida se as afirmações a seguir são **verdadeiras** ou **falsas**. **Justifique !** Prove a afirmação que for verdadeira e quando for falsa, exiba um exemplo mostrando que é falsa.

   (a) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se $n$ é **ímpar** e $A^t = -A$ então $\det A = 0$.

   (b) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $\det A = 1$. Então $\det(A + I) = \det(A^{-1} + I)$.

   (c) Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Então $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.

(a) Se $A^t = -A$ então $\det A^t = \det(-A)$.
Mas $\det(-A) = (-1)^n \det A$. Como $n$ é ímpar, $\det(-A) = -\det A$.
Logo $\det A = -\det A \Rightarrow 2\det A = 0 \Rightarrow \det A = 0$.
VERDADEIRA

(b) Como $\det A = 1$, vale que $A$ é inversível.
Então $I = AA^{-1}$

$$\det(A+I) = \det(A + AA^{-1}) = \det(A(I+A^{-1}))$$
$$= \underbrace{(\det A)}_{=1}\det(I+A^{-1}) = \det(I+A^{-1})$$

VERDADEIRA

(c) $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$

$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \iff AB = BA$.

Essa afirmação é então FALSA.
Basta escolher 2 matrizes que não comutam.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A^2 = A$ e $B^2 = 0$. Logo $A^2 - B^2 = A$

$$(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq A.$$