

MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear
2ª Prova - 25/10/2018

Nome: _____

Nº USP: _____

Questão	
1	
2	
3	
Nota	

Atenção:

- 1 - Leia os enunciados com atenção!
- 2 - Justifique cuidadosamente todas as suas afirmações.
- 3 - Boa prova!

1. **(3,0)** Verifique se cada um dos subconjuntos S é ou não um subespaço do espaço vetorial V . JUSTIFIQUE.

(a) $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2\}$.

(b) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $S = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a + c = b + d \right\}$.

(c) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $S = \{M \in M_2(\mathbb{R}) : \det M = 0\}$.

(a) S **não** é um subespaço de $\mathbb{R}^2$ já que, por exemplo, $(1, -1) \in S$ pois $1^2 = (-1)^2$ e $(1, 1) \in S$ mas $(1, -1) + (1, 1) = (0, 2) \notin S$ já que $0^2 \neq 2^2$.

(b) S é um subespaço de $M_2(\mathbb{R})$:

(1) A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$ pois $0 + 0 = 0 + 0$.

(2) Sejam $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \in S$ e $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in S$. Então

$$a_1 + c_1 = b_1 + d_1 \text{ e } a_2 + c_2 = b_2 + d_2.$$

Mas

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

e

$$a_1 + a_2 + (c_1 + c_2) = (a_1 + c_1) + (a_2 + c_2) = (b_1 + d_1) + (b_2 + d_2) = (b_1 + b_2) + (d_1 + d_2).$$

A última linha mostra que a matriz $\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in S$ pois satisfaz a propriedade que define o conjunto S .

(3) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in S$. Então $\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$. Como $a + c = b + d$, temos que $\alpha a + \alpha c = \alpha(a + c) = \alpha(b + d) = \alpha b + \alpha d$, o que prova que $\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in S$.

(c) S **não** é subespaço de $M_2(\mathbb{R})$. Considere, por exemplo, $E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$ pois

$\det E_{11} = 0$. Também $E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in S$, pois $\det E_{22} = 0$. Entretanto $\det I_2 = \det(E_{11} + E_{22}) = 1 \neq 0$. Assim a soma de dois elementos de S não está em S e S não é subespaço de $M_2(\mathbb{R})$.

2. (3,0) Seja $S = \left\{ M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : x - y = z + t \text{ e } 2x + 2z = y \right\}$.

(a) Prove que S é um subespaço de $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Determine uma base de S . Qual é a dimensão de S ?

(a) Análogo ao exercício 1(b).

(b) Vamos resolver o sistema linear

$$\begin{cases} x - y = z + t \\ 2x + 2z = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Escalonando a matriz do sistema, obtemos o sistema de equações lineares equivalente que é

$$\begin{cases} x - y - z + t = 0 \\ y + 4z - 2t = 0 \end{cases}.$$

As soluções do sistema são então $y = -4z + 2t$ e $x = y + z - t = -4z + 2t + z - t = -3z + t$. Assim, toda matriz de S é da forma

$$\begin{bmatrix} -3z + t & -4z + 2t \\ z & t \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, z, t \in \mathbb{R}.$$

Com isso, vemos que o conjunto

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é um conjunto gerador para S já que toda matriz que está em S pode ser escrita como uma combinação linear dessas duas matrizes. Também vale que B é LI, pois se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que

$$a \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{bmatrix} -3a + b & -4a + 2b \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o que implica que $a = b = 0$.

Assim B é uma base de S e como tem 2 vetores, então $\dim S = 2$.

3. (4,0) Determine se as afirmações a seguir são **verdadeiras** ou **falsas**. **Justifique**. Prove a afirmação que for verdadeira e quando for falsa, explique a razão de ser falsa, através de um exemplo, se for esse o caso.

- (a) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $A = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset V$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI e A é LD. Então o vetor v_4 pode ser escrito como combinação linear de v_1, v_2 e v_3 .
- (b) Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $A = \{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ tal que todos os subconjuntos de A com 2 elementos são LI. Então A é LI.
- (c) Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $S_1 = [(1, 1, 2), (1, 1, 3)]$ e $S_2 = [(0, 0, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 1)]$. Então $S_1 = S_2$.
- (d) O conjunto de polinômios $A = \{1 + x, 1 + x^3, x + x^2 + x^3, x - x^3\}$ é uma base de $P_3(\mathbb{R})$.

- (a) **VERDADEIRA** Como A é LD, existem escalares a_1, a_2, a_3, a_4 **não todos nulos** tais que $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = 0$. Afiramos que $a_4 \neq 0$. De fato, se $a_4 = 0$ teríamos que $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ e como $\{v_1, v_2, v_3\}$ é LI isso implicaria que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Contradição, pois ao menos um dos $a_i \neq 0$. Logo temos que $a_4 \neq 0$ e $v_4 = (-\frac{a_1}{a_4})v_1 + (-\frac{a_2}{a_4})v_2 + (-\frac{a_3}{a_4})v_3$.
- (b) **FALSA** Considere, por exemplo, em $\mathbb{R}^2$, os vetores $v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)$ e $v_3 = (1, 1) = v_1 + v_2$. Então $A = \{v_1, v_2, v_3\}$ é LD já que v_3 é uma combinação linear de v_1 e v_2 . É fácil observar que os subconjuntos de A com 2 elementos são LI.
- (c) Basta ver se $\{(1, 1, 2), (1, 1, 3)\} \subset S_2 = [(0, 0, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 1)]$ e $\{(0, 0, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 1)\} \subset S_1 = [(1, 1, 2), (1, 1, 3)]$.

Note que $(1, 1, 3) = 2(0, 0, 1) + (1, 1, 1)$. Logo $S_1 \subset S_2$.

Temos também que $(0, 0, 1) = (1, 1, 3) - (1, 1, 2)$. Logo $(0, 0, 1) \in S_1$. Também $(1, 1, 1) = 2(1, 1, 2) - (1, 1, 3)$. Logo $(1, 1, 1) \in S_1$. Assim, $S_2 \subset S_1$.

Temos então que $S_1 = S_2$ e a afirmação é **VERDADEIRA**

- (d) Observe que $x - x^3 = 1 + x - (1 + x^3)$ e então o conjunto A é LD e portanto não é uma base de $P_3(\mathbb{R})$. Essa afirmação é **FALSA**.