MAT 0134 $2^{\underline{a}}$ prova - 23/10/2018.

Prof. Ivan Shestakov

Turma I

1. (*2,5 pontos*). Dados os vetores $u_1 = (1,2,1)$, $u_2 = (1,1,0)$, $u_3 = (0,1,2)$ e $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,-1,0)$, achar um operador linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F(u_i) = v_i$, $i = 1,2,3$. Qual é a matriz do F na base canônica de $\mathbb{R}^3$?

2. (*3,0 pontos*). Seja $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear definido por $F(x,y,z,t) = (x-z, 0, x-z, t+y)$. Determinar uma base de cada um dos seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$:
$$Ker\, F,\ Im\, F,\ Ker\, F \cap Im\, F,\ Ker\, F + Im\, F.$$

3. (*2,0 pontos*). Seja F o operador linear do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz na base $B = \{(1,2),(1,3)\}$ é
$$[F]_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$
Determinar a matriz de F na base canônica do $\mathbb{R}^2$.

4. (*2,5 pontos*). Seja F o operador linear do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz na base canônica é dada como $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

   a) Achar os autovalores e autovetores do F.

   b) Determinar uma matriz $M \in M_2(\mathbb{R})$ de maneira que $M^{-1}AM$ seja diagonal.

a) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(3-\lambda) = 6$

$\cancel{6} - 2\lambda - 3\lambda + \lambda^2 = \cancel{6}$

$\lambda^2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-5) = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}$