

(c) $(3, 2, 8) = a(1, 0, 2) + b(0, 1, 1) \Rightarrow a = 3, b = 2$
 Logo $(3, 2, 8) = 3(1, 0, 2) + 2(0, 1, 1) = 3T(e_1) + 2T(e_2) \stackrel{\text{Linear}}{=} T(3e_1 + 2e_2)$
 $\text{Im } T$ **MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear** $T(3e_1 + 2e_2) = T(3, 2, 0, 0)$
3ª Prova - 29/11/2018

Nome: _____
 Nº USP: _____

Atenção:

- 1 - Leia os enunciados com atenção!
- 2 - Justifique cuidadosamente todas as suas afirmações.
- 3 - Boa prova!

Questão	
1	
2	
3	
4	
Nota	

Podemos tomar
 $u = (3, 2, 0, 0)$
 $e T(u) = v$.

NOTAÇÃO Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Denote por $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a transformação linear definida por $T_A(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$, onde $A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$.

1. (2,5) Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z, t) = (x + z + t, y - z + t, 2x + y + z + 3t)$.

- (a) Determine a matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $T = T_A$.
- (b) Determine uma base de $\text{Ker } T$ e uma base de $\text{Im } T$.
- (c) Verifique se o vetor $v = (3, 2, 8)$ está na $\text{Im } T$. Em caso afirmativo, determine $u \in \mathbb{R}^4$ tal que $T(u) = v$.

(a) $T(e_1) = (1, 0, 2)$
 $T(e_2) = (0, 1, 1)$
 $T(e_3) = (1, -1, 1)$
 $T(e_4) = (1, 1, 3)$

Assim $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\text{Ker } T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid T(x, y, z, t) = T_A(x, y, z, t) = (0, 0, 0)\}$,
 isto é, queremos encontrar os vetores $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$
 tais que $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, isto é, queremos resolver o
 sistema linear homogêneo cuja matriz é A .

Escalonando A :
 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L3 \leftarrow L3 - 2L1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L3 \leftarrow L3 - L2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Assim: $y = z - t$ e $x = -z - t$.
 Logo $\text{Ker } T = \{(-z - t, z - t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} =$
 $\{z(-1, 1, 1, 0) + t(-1, -1, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$
 Uma base de $\text{Ker } T$ é $B_{\text{Ker } T} = \{(-1, 1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\}$

Como vimos em aula, a primeira e a segunda colunas da matriz escalonada contêm pivô. Assim, uma

3. (2,0) Seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

(a) Determine os autovalores e autovetores de T_A .

(b) Usando as informações do item (a) descreva T_A geometricamente, mostre que para todo $v \in \mathbb{R}^2$, $T_A(v)$ é a projeção ortogonal de v em uma reta de $\mathbb{R}^2$, qual é a reta?

$$\begin{aligned} (a) \quad \det(A - \lambda I_2) &= \det \begin{bmatrix} \frac{1}{5} - \lambda & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} - \lambda \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{5} - \lambda\right)\left(\frac{4}{5} - \lambda\right) - \frac{4}{5} = \lambda^2 - \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\right)\lambda + \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \\ &= \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1) \end{aligned}$$

Os autovalores de T_A são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$.

$$V(0) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid T_A(x, y) = \underbrace{0}_{=(0,0)} \} = \text{Ker } T_A$$

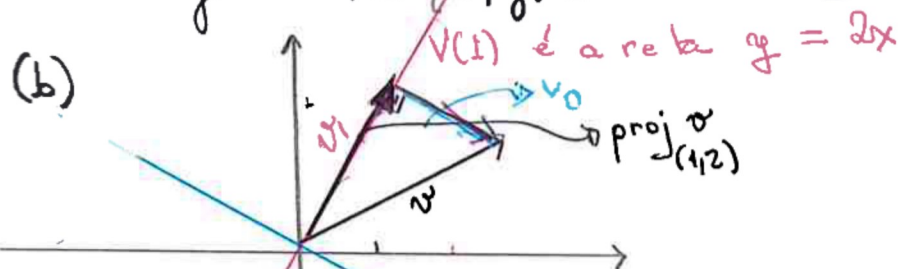
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y$$

$$V(0) = \text{Ker } T = [(-2, 1)]$$

$$V(1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid T_A(x, y) = (x, y) \}$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$$

$$\text{Logo } V(1) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0 \} = [(1, 2)]$$



$V(0)$ é a reta $y = -\frac{1}{2}x$

O que é fazer a projeção ortogonal de um vetor v na direção de $(1, 2)$? É escrever $v = v_1 + v_0$, com $v_0 \perp (1, 2)$ e $v_1 \parallel (1, 2)$, e $\text{proj } v = v_1$.
 Veja que $B = \{(1, 2), (-2, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ e $(1, 2) \perp (-2, 1)$.

2. (2,5) Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad -A-$

autovetores associados $\rightarrow$ autovetor associado a 2

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine os autovalores de A .

(b) Determine (se existir) uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T_A .

(c) Determine (se existir) uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal.

(a) $p_A(t) = \det(A - tI_3) = \det \begin{bmatrix} 1-t & 1 & 2 \\ 0 & -t & -2 \\ 0 & 1 & 3-t \end{bmatrix}$
 $= (1-t)(-t(3-t) + 2) = (1-t)(t^2 - 3t + 2)$
 $= (t-1)^2(t-2)$

Os autovalores são as raízes de $p_A(t)$, que são 1 e 2.

(b) Vamos verificar se as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor coincidem.

$$V(1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T_A(x, y, z) = 1(x, y, z)\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - I_3) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\} =$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

$$\xrightarrow{\substack{L2 \leftrightarrow L1 \\ L3 \leftrightarrow L1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo } V(1) = \{(x, y, z) \mid y + 2z = 0\} = \{(x, -2z, z), x, z \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{z(1, 0, 0) + z(0, -2, 1), x, z \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Base de } V(1): \{(1, 0, 0), (0, -2, 1)\} \quad \text{mg}(1) = 2 = \text{ma}(1).$$

$$V(2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid T_A(x, y, z) = 2(x, y, z)\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$y = -z \quad x = y + 2z = z$$

4. (3,0) Decida se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas. JUSTIFIQUE!!!

(a) Nenhuma transformação linear $T: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^9$ é sobrejetora.

(b) A matriz $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ é diagonalizável quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) A matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ é diagonalizável quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Temos que $\dim \mathbb{R}^7 = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T$.

$$7 = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T$$

Se T sobrejetora, então $\text{Im } T = \mathbb{R}^9 \Rightarrow$
 $\dim \text{Im } T = 9$.

$$\text{N\~ao \u00e9 poss\u00edvel } 7 = \dim \text{Ker } T + 9!$$

A afirma\u00e7\u00e3o VERDADEIRA.

$$(b) \det \begin{bmatrix} a-t & -b \\ b & a-t \end{bmatrix} = (a-t)^2 + b^2$$

$$= t^2 - 2at + a^2 + b^2$$

$$\Delta = 4a^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2$$

Se $b \neq 0$, então $\Delta < 0$ e A N\u00c3O tem autovalores reais e portanto N\u00c3O \u00e9 diagonaliz\u00e1vel.

(Se $A = 0$, \u00e9nt\u00e3o $b = 0$ e $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ e j\u00e1 \u00e9 diagonal.)

A FIRMAC\u00c3O FALSA.

$$(c) p_A(t) = \det \begin{bmatrix} a-t & b \\ b & a-t \end{bmatrix} = (a-t)^2 - b^2$$

$$= t^2 - 2at + a^2 - b^2$$

$$t = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4a^2 + 4b^2}}{2} = \frac{2a \pm 2b}{2} = \begin{matrix} a+b \\ a-b \end{matrix}$$

Note que $a+b = a-b \Leftrightarrow b=0$, Ent\u00e3o

$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ que j\u00e1 \u00e9 diagonal.

Se $b \neq 0$, \u00e9nt\u00e3o $a-b \neq a+b$ e A tem 2 autovalores