

MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear
Prova Substitutiva -06/12/2018

Nome: _____

Nº USP: _____

Atenção:

- 1 - Leia os enunciados com atenção!
- 2 - Justifique cuidadosamente todas as suas afirmações.
- 3 - Boa prova!

Questão	
1	
2	
3	
4	
Nota	

1. (2,5) Verifique se cada um dos subconjuntos S é ou não um subespaço do espaço vetorial V . JUSTIFIQUE. Nos casos em que S for um subespaço, determine uma base de S .

(a) $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 = x^3\}$.

(b) $V = M_2(\mathbb{R})$ e $S = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a + d = 0 \right\}$.

(c) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $S = \{p(t) \in V \mid p(0) = p(3)\}$.

(a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 = y^3\}$:

Mostrar $x^3 = y^3 \iff x = y$. Logo

$S = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $S = \text{span}\{(1, 1)\}$

$B_S = \{(1, 1)\}$

(b) $a + d = 0 \implies d = -a$. Então

$S = \left\{ M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S$ (ii) Se $M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{bmatrix}$

então $M_1 + M_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & -a_1 - a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & -(a_1 + a_2) \end{bmatrix} \in S$.

e (iii) Se $d \in \mathbb{R}$ e $M \in S$, então

$dM = \begin{bmatrix} da & db \\ dc & d(-a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} da & db \\ dc & -da \end{bmatrix} \in S$.

Logo S é subespaço.

$\forall M \in S \implies M = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$.

Logo $S = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right]$.

Como $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é LI,

B é uma base de S .

(c) S é subespaço pois:

(i) $0 \in S$ (o polinômio nulo está em S)
pois $0(0) = 0(3) = 0$

(ii) Se $p(t), q(t) \in S$ então

$$p(0) = p(3)$$

$$q(0) = q(3)$$

$$(p+q)(0) = p(0) + q(0) = p(3) + q(3) = (p+q)(3).$$

Logo $p+q \in S$.

(iii) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $p \in S$ então

$$(\alpha p)(0) = \alpha p(0) = \alpha p(3) = (\alpha p)(3)$$

Logo $\alpha p \in S$.

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$p(0) = a_0 \quad \text{e} \quad p(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3, \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}.$$

$$p(0) = p(3) \Rightarrow 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 0.$$

$$\text{Logo } a_1 = -3a_2 - 9a_3.$$

$$\text{Assim } p(t) = a_0 + (-3a_2 - 9a_3)t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$p(t) = a_0 + a_2(t^2 - 3t) + a_3(t^3 - 9t).$$

$$\text{Logo } S = [1, t^2 - 3t, t^3 - 9t].$$

Como esses 3 polinômios são também LI

temos que uma base de S é

$$B_S = \{1, t^2 - 3t, t^3 - 9t\}$$

NOTAÇÃO Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Denote por $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a transformação linear

definida por $T_A(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$, onde $A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$.

2. (2,5) Seja $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -5 & -3 & 12 \\ 7 & 1 & 8 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine uma base de $\text{Ker } T_A$.

(b) Determine uma base de $\text{Im } T_A$.

(c) Mostre que $v = (a, b, c) \in \text{Im } T_A$ se, e somente se, $37a + 13b = 9c$.

(a) $\text{Ker } T_A = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \}$, ou seja, é o subespaço das soluções do sistema linear homogêneo com matriz A .

Escalonando A $L_2 - 2L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -5 & -3 & 12 \\ 7 & 1 & 8 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -9 & -9 & 18 \\ 7 & 1 & 8 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 7L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -9 & -9 & 18 \\ 0 & -13 & -13 & 26 \end{bmatrix}$$

$-\frac{1}{9}L_2$ $-\frac{1}{13}L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo $\begin{cases} x + 2y + 3z - 3t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -z + 2t \\ x = -2y - 3z + 3t \\ x = 2z - 4t - 3z + 3t \\ x = -z - t \end{cases}$

$$\text{Ker } T_A = \{ (-z-t, -z+2t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ z(-1, -1, 1, 0) + t(-1, 2, 0, 1) \}$$

$$B_{\text{Ker } T_A} = \{ (-1, -1, 1, 0), (-1, 2, 0, 1) \}$$

(b) $B_{\text{Im } T_A} = \{ (1, 2, 7), (2, -5, 1) \}$ já que as colunas 1 e 2 da matriz escalonada contêm pivôs e então as colunas 1 e 2 de A geram $\text{Im } T_A$ e são LI.

(c) $(a, b, c) \in \text{Im } T_A \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $(a, b, c) = \alpha(1, 2, 7) + \beta(2, -5, 1)$, isto é $\Leftrightarrow$ o sistema (*)

$$(*) \begin{cases} \alpha + 2\beta = a \\ 2\alpha - 5\beta = b \end{cases} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & a \\ 2 & -5 & | & b \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & a \\ 0 & -9 & | & b - 2a \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \cdot (-1/9)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & a \\ 0 & 1 & | & (b-2a)/9 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & a - 2(b-2a)/9 \\ 0 & 1 & | & (b-2a)/9 \end{bmatrix}$$

3. (2,0) Seja $a \in \mathbb{R}$ e seja $A \in M_2(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1-a^2}{1+a^2} & \frac{2a}{1+a^2} \\ \frac{2a}{1+a^2} & \frac{a^2-1}{1+a^2} \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os autovalores e autovetores de A .

(b) Seja $a = -1$. Mostre que T_A é a reflexão em torno da reta $y = -x$, isto é, $T_A(c, d)$ é o simétrico de (c, d) em relação à reta $y = -x$.

Sugestão: Escreva o vetor (c, d) como combinação linear dos autovetores de T_A obtidos no item (a) e aplique T_A .

$$\begin{aligned} (a) \quad p_A(t) &= \det(A - tI_2) = \det \begin{bmatrix} \frac{1-a^2}{1+a^2} - t & \frac{2a}{1+a^2} \\ \frac{2a}{1+a^2} & \frac{a^2-1}{1+a^2} - t \end{bmatrix} = \\ &= \left(\frac{1-a^2}{1+a^2} - t \right) \left(\frac{a^2-1}{1+a^2} - t \right) - \frac{4a^2}{(1+a^2)^2} = \left(\frac{1-a^2}{1+a^2} \right) \left(\frac{a^2-1}{1+a^2} \right) - \left(\frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{a^2-1}{1+a^2} \right) t \\ &+ t^2 - \frac{4a^2}{(1+a^2)^2} = -\frac{a^4 + 2a^2 - 1}{(1+a^2)^2} + t^2 - \frac{4a^2}{(1+a^2)^2} \\ &= t^2 - \frac{(a^2+1)^2}{(1+a^2)^2} = t^2 - 1 = (t-1)(t+1) \end{aligned}$$

Os autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.

$$V(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid T_A(x, y) = (x, y)\}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1-a^2}{1+a^2} - 1 & \frac{2a}{1+a^2} \\ \frac{2a}{1+a^2} & \frac{a^2-1}{1+a^2} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 1-a^2-1-a^2 & 2a \\ 2a & a^2-1-1-a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a^2 x + 2ay = 0 \\ 2ax - 2y = 0 \end{cases}$$

Se temos que $2ax = 2y \Rightarrow y = ax$.

$$\text{Se logo } V(1) = \{(x, ax) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, a)\}.$$

$$V(-1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid T_A(x, y) = -(x, y)\}.$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1-a^2}{1+a^2} + 1 & \frac{2a}{1+a^2} \\ \frac{2a}{1+a^2} & \frac{a^2-1}{1+a^2} + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1+a^2} \begin{bmatrix} 2 & 2a \\ 2a & 2a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2ay = 0 \\ 2ax + 2a^2y = 0 \end{cases}$$

Se temos que $x = -ay$

$$V(-1) = \text{span}\{(-a, 1)\}.$$

(b) $a = -1$

-A-

$V(1) = [(1, -1)]$, isto é, $V(1)$ é a reta $y = -x$.

$V(-1) = [(1, 1)]$, isto é, $V(-1)$ é a reta $y = x$.

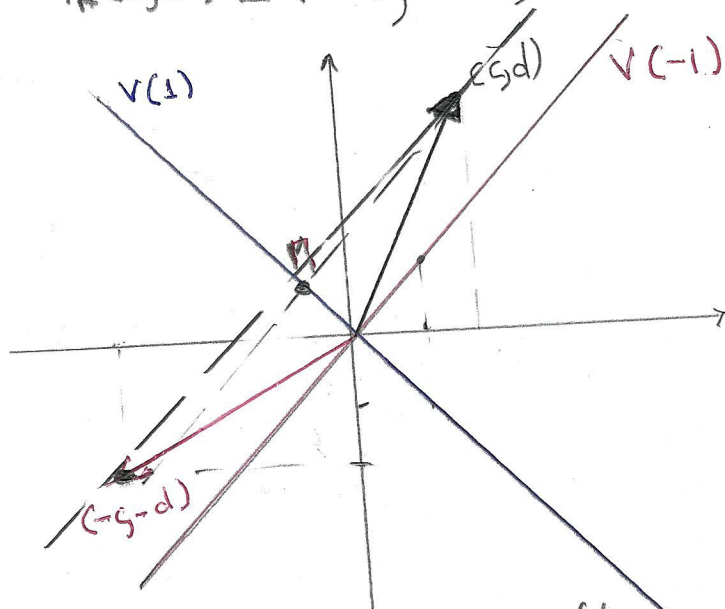
$$(c, d) = \alpha(1, -1) + \beta(1, 1)$$

$$\begin{cases} c = \alpha + \beta \\ d = -\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{c+d}{2} \quad \text{e} \quad d = c - \left(\frac{c+d}{2}\right) = \frac{c-d}{2}$$

$$(c, d) = \alpha(1, -1) + \beta(1, 1)$$

$$\text{Logo } T_A(c, d) = \alpha(1, -1) - \beta(1, 1) = (\alpha - \beta, -\alpha - \beta)$$

$$T_A(c, d) = (-d, -c)$$



Para determinar o simétrico de (c, d) em relação à reta $y = -x$.

(1) Trace por (c, d) a reta ortogonal à reta $y = -x$.

Ela tem equação:

$$y - d = x - c$$

(2) Veja a interseção da reta $y = -x$ com a reta $y = x + d - c$.

Essa interseção é o ponto $M = \left(\frac{c-d}{2}, \frac{d-c}{2}\right)$.

(3) Se (x_0, y_0) é o simétrico de (c, d) em relação à reta $y = -x$, então M é o ponto médio do segmento $(x_0, y_0)(c, d)$.

$$M = \left(\frac{x_0+c}{2}, \frac{y_0+d}{2}\right) = \left(\frac{c-d}{2}, \frac{d-c}{2}\right)$$

$$(x_0, y_0) = (-d, -c) = T_A(c, d)$$

4. (3,0) As afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas? JUSTIFIQUE!!!

(a) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

então $\dim \text{Ker } T_A = n - 1$.

(b) A matriz $A = \begin{bmatrix} a & a^2 \\ a & a^2 \end{bmatrix}$ é diagonalizável para todo $a \in \mathbb{R}$.

(c) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é tal que $A^4 = 0$ então $I_n - A$ tem inversa (aqui I_n é a matriz identidade).

(a) $\text{Im } T_A$ é o subespaço gerado pelas colunas de T_A .
Como todas as colunas são iguais, $\text{Im } T_A = [(1, 1, \dots, 1)]$.
Como $(1, 1, \dots, 1) \neq (0, \dots, 0)$, $\dim \text{Im } T_A = 1$. Logo, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, $\dim \text{Ker } T_A = n - 1$.

AFIRMAÇÃO VERDADEIRA.

$$(b) p_A(t) = \det \begin{bmatrix} t - a & -a^2 \\ -a & t - a^2 \end{bmatrix} = t^2 - 2(a + a^2)t + a^3 - a^3$$

$$= t^2 - 2(a + a^2)t. \text{ Se } a + a^2 \neq 0, \text{ então}$$

A tem 2 autovalores distintos, 0 e $a + a^2$,
e portanto é diagonalizável.

Entretanto, se $a^2 + a = 0$ (basta $a \leq 0$), então

$$p_A(t) = t^2, \quad V(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax - ay = 0\} \\ A = \begin{bmatrix} a & -a \\ a & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim a multiplicidade geométrica de 0 é 1 e a algébrica é 2. Nesse caso A NÃO é diagonalizável.

(Se $a = 0$, A é a matriz nula, que já é diagonal).

AFIRMAÇÃO FALSA.

$$(c) \text{ Se } A^4 = 0 \text{ então } I_n = I_n^4 - A^4 = (I_n - A)(I_n + A + A^2 + A^3).$$

Logo $I_n - A$ é inversível e

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3.$$

AFIRMAÇÃO VERDADEIRA.