MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear

1ª Prova - 07/11/2020

Atenção:

1 - Leia os enunciados com atenção!
2 - Justifique cuidadosamente todas as suas afirmações.
3 - Boa prova!

1. (**3,0**) Verifique se cada um dos subconjuntos W é ou não um subespaço do espaço vetorial V. JUSTIFIQUE. Nos casos em que W é um subespaço de V, determine a dimensão de W exibindo uma base de W.

   (a) $V = M_3(\mathbb{R})$ e W é o conjunto das matrizes $A \in V$ tais que a soma dos elementos da primeira linha de A é igual à soma dos elementos da primeira coluna de A.

   (b) $V = \mathbb{R}^4$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x_1 + x_4)^2 = (x_2 + x_3)^2\}$.

   (c) $V = P_3(\mathbb{R})$ e $W = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) \mid 2p(1) = p(0)\}$.

2. (**1,0**) Determine uma base do subespaço $W \subset \mathbb{R}^4$, onde

$$W = [(1,2,-1,-2), (3,8,5,-1), (1,3,3,1), (1,1,1,1)].$$

3. (**1,5**) Considere o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 16x_3 - 9x_4 &= 0 \end{cases}$$

   Determine uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$ das soluções do sistema linear homogêneo.

4. (**3,0**) As afirmações a seguir são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**? Demonstre as que forem verdeiras. Quando a afirmação for falsa, exiba um contra-exemplo ou mostre que ela é falsa.

   (a) Se $W_1 = [(4,1,2,2), (1,1,2,3)] \subset \mathbb{R}^4$ e $W_2 = [(5,-1,-2,-5), (1,1,1,1)] \subset \mathbb{R}^4$ então $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

   (b) Seja V um espaço vetorial de dimensão maior ou igual a 4 e seja $S \subset V$, $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tal que os subconjuntos $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_3, v_4\}$, $\{v_2, v_3, v_4\}$,$\{v_1, v_3, v_4\}$, são LI. Então S é LI.

   (c) Seja $V = P_3(\mathbb{R})$. Então $[t^2 - 1, t^3 - 1] = [t^3 - t^2, 2t^3 + 3t^2 - 5]$.

5. (**1,5**) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

   Sejam $L_1, L_2, L3$ as linhas de A consideradas como vetores de $\mathbb{R}^3$ e C_1, C_2, C_3 as colunas de A consideradas como vetores de $\mathbb{R}^3$. Mostre que $[L_1, L_2, L_3] = [C_1, C_2, C_3]$.

   Dê um exemplo de uma matriz 3×3 tal que o subespaço gerado por suas linhas é diferente do subespaço gerado por suas colunas.