MAT0134 - Introdução à Álgebra Linear

2ª Prova -19/12/2020

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS AFIRMAÇÕES. DEIXE CLARO QUE VOCÊ SABE O QUE ESTÁ FAZENDO!!

NOTAÇÃO: Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Denote por $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a transformação linear definida por

$$T_A(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m) \text{ onde } A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

1. **(2,0)** Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$T(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y - 7z, -3x + y - 14z, 4x + 2y + 2z).$$

(a) Determine a matriz $A \in M_4(\mathbb{R})$ tal que $T = T_A$.

(b) Determine uma base de $\text{Ker} T$ e uma base de $\text{Im} T$.

(c) Verifique se o vetor $v = (7, 8, -3, 14)$ está na $\text{Im} T$. Em caso afirmativo, determine $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(u) = v$.

2. **(2,0)** Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os autovalores de A .

(b) Determine (se existir) uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de T_A .

(c) Determine (se existir) uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = D$, onde D é uma matriz diagonal. Escreva a matriz P e a matriz D .

3. **(2,0)** Considere a cônica de equação

$$3x^2 + 3y^2 - 2xy + 2x - 6y + F = 0.$$

(a) Reconheça e esboce a cônica para $F = 3$.

(b) Reconheça e esboce a cônica quando $F = -29$.

4. **(1,5)** Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear **não nula** e $T \neq I$, onde I é a identidade tal que $T \circ T = T$.

(a) Como T é não nula, existe $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) \neq 0$ e como T não é a identidade, existe $u \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(u) \neq u$. Mostre que $B = \{T(v), u - T(u)\}$ é LI.

Sugestão: Faça uma combinação linear dos 2 vetores do conjunto B e iguale a 0. Daí, aplique a T a essa combinação linear.

(b) Qual é a matriz de T na base B ?

5. **(2,5)** As afirmações a seguir são **VERDADEIRAS** ou **FALSAS**? Justifique, provando as que forem verdadeiras ou dê um contra-exemplo ou um argumento lógico mostrando que é falsa!

(a) A matriz

$$\begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \\ c & c & c \end{bmatrix}$$

é diagonalizável quais que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(b) Podem existir transformações lineares $T : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^9$ e $S : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^7$ tais $S \circ T$ é bijetora.

(c) Não existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^7$ com $\text{Ker} T = \text{Im} T$.