PROVA 1 - ÁLGEBRA I PARA COMPUTAÇÃO - 2011 - IME-USP

PROF. PAULO A. MARTIN

1. [2 pontos] Prove por indução que, para todo $n \geq 1$, temos:
$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

2. [2 pontos] Sejam a, b e c inteiros positivos. Definimos o *maior divisor comum* de a, b e c como o maior inteiro d tal que $d \mid a$, $d \mid b$ e $d \mid c$.

(a) Se $d_1 = (a,b)$ e $d_2 = (b,c)$, será verdade que $d = (d_1, d_2)$?

(b) Será que existem $x, y, z \in \mathbf{Z}$ tais que $d = xa + yb + zc$?

3. [1,5 pontos] Encontre x e y, caso existam, tais que
$$1402x + 1969y = 1.$$

4. [2 pontos] Seja a um inteiro positivo. Qual o maior divisor comum de a e $a+2$?

5. [2,5 pontos] Se a, b e c são inteiros positivos, prove ou dê contra-exemplo:

(a) Se $a \mid bc$ então ou $a \mid b$ ou $a \mid c$.

(b) $(ab, c) = (a,c)(b,c)$.

(c) O maior divisor comum de a e $a+1$ é sempre 1.

(d) É possível escolher a e b de modo que $a + b = 100$ e $(a,b) = 3$.

(e) Se a for ímpar, $a^2 - 1$ é sempre divisível por 8.

$-5 - 4 = 1$

$15 - 12$

k_9 k_{10} 1

$d_1 | a$ e $d_1 | b$, $d_2 | b$ e $d_2 | c$

$a = d_1 k_1$ $b = d_2 . k_3$

$b = d_1 . k_2$ $c = d_2 . k_4$

$2 \nmid a$ ou $2 \nmid b$, pois caso contrário o mdc seria par, e não 3. logo