

MAT0164 - Números Inteiros: Uma introdução à Matemática
2ª Prova - 31/05/2017

Nome: _____

Nº USP: _____

Questão	
1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

Atenção:

- 1 - Leia os enunciados com atenção!
- 2 - Justifique cuidadosamente todas as suas afirmações.
- 3 - Boa prova!

1. (2,0) Determine o menor inteiro positivo que tem resto 13 quando dividido por 45 e resto 28 quando dividido por 33.

Seja a o inteiro procurado. Então

$$a = 45x + 13 = 33y + 28$$

Assim, temos a equação diofantina

$$45x - 33y = 15 \quad \Leftrightarrow$$

$$15x - 11y = 5 \quad (*)$$

$$\text{mdc}(15, 11) = 1$$

Pelo algoritmo de Euclides, ou mesmo testando,

$$15 \times 3 - 11 \times 4 = 1$$

$$\text{Portanto } 15 \times 15 - 11 \times 20 = 5$$

Assim, as soluções da equação (*) são

$$x = 15 - 11t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$y = 20 - 15t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

$$a = 45(15 - 11t) + 13$$

$$45 \times 15 + 13 - 45 \times 11t \geq 0$$

$$45 \times 5 + 13 \geq 45 \times 11t$$

$$t \leq \frac{45 \times 15 + 13}{45 \times 11} < 2$$

$$45 \times 11$$

$$t = 1 \text{ é o menor}$$

$$t = 1 \Rightarrow \boxed{x = 4}$$

$$a = 45 \times 4 + 13 = 193$$

$$(t = 1 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow a = 33 \times 5 + 28 = 165 + 28 = 193)$$

$$\boxed{a = 193}$$

MAT0164 - Números Inteiros: Uma introdução à Matemática
2ª Prova - 31/05/2017

Nome: _____
 Nº USP: _____

Questão	
1	
2	
3	
4	
5	
Nota	

Atenção:

- 1 - Leia os enunciados com atenção!
- 2 - Justifique cuidadosamente todas as suas afirmações.
- 3 - Boa prova!

1. (2,0) Determine o menor inteiro positivo que tem resto 33 quando dividido por 34 e resto 17 quando dividido por 44.

$$a = 34x + 33 = 44y + 17$$

Os inteiros x e y satisfazem a equação diofantina

$$44y - 34x = 33 - 17$$

$$44y - 34x = 16 \quad (*)$$

$\text{mdc}(34, 44) = 2$ e $2 \mid 16$ e portanto a equação tem solução.

É claro que $44y - 34x = 16 \Leftrightarrow 22y - 17x = 8$
 Pelo Algoritmo de Euclides

	1	3	2
22	17	5	2
5	2	1	

$$1 = 5 - 2 \times 2 = 22 - 17 - 2 \times (17 - 3 \times 5)$$

$$= 22 - 3 \times 17 + 6(22 - 17)$$

$$= -9 \times 17 + 7 \times 22$$

$$\text{Assim } 22 \times 7 - 17 \times 9 = 1$$

$$22 \times 56 - 17 \times 72 = 8$$

$$\text{Soluções de } (*) \quad \left. \begin{aligned} y &= 56 - 17t \\ x &= 72 - 22t \end{aligned} \right\} t \in \mathbb{Z}$$

$$56 - 17t \geq 0 \Rightarrow t \leq 3$$

$t = 3$ é a menor solução positiva

$$t = 3 \Rightarrow x = 72 - 66 = 6$$

$$a = 34 \cdot 6 + 33 = 204 + 33 \Rightarrow a = 237$$

2. (2,0) Mostre, por indução em n que $F_n = 2^{2^n} + 1 \equiv 5 \pmod{12}$.

$$n=1 \quad F_1 = 2^2 + 1 = 5 \equiv 5 \pmod{12}$$

Suponha $k \geq 1$ e que $F_k \equiv 5 \pmod{12}$. (Hipótese de Indução)

Mostrar que $F_{k+1} \equiv 5 \pmod{12}$. (Tese)

$$F_{k+1} = 2^{2^{k+1}} + 1 = (2^{2^k})^2 + 1$$

$$2^{2^k} \equiv 5 - 1 \pmod{12} \quad (\text{Pela Hipótese de Indução})$$

$$\text{Logo } 2^{2^{k+1}} + 1 \equiv 4 + 1 = 5 \pmod{12}.$$

Pelo PIF a afirmação é verdadeira para todo $n \geq 1$.

3. (2,0) Mostre que $20^{15} \equiv 1 \pmod{61}$.

Vamos mostrar que $\begin{cases} 4^{15} \equiv -1 \pmod{61} \\ 5^{15} \equiv -1 \pmod{61} \end{cases}$. Como

$\text{mdc}(4, 5) = 1$, vale que $4^{15}, 5^{15} \equiv \pm 1 \pmod{61}$

$$4^{15} = 2^{30} = (2^6)^5 \quad 2^6 = 64 \equiv 3 \pmod{61}$$

$$\text{Logo } 4^{15} \equiv 3^5 \pmod{61} \quad 3^4 = 81 \equiv 20 \pmod{61}$$

$$\Rightarrow 3^5 = 3 \cdot 20 = 60 \pmod{61} \equiv -1 \pmod{61}$$

$$\text{Logo } 4^{15} \equiv -1 \pmod{61}$$

$$5^{15} = (5^3)^5$$

$$5^3 = 125 \equiv 3 \pmod{61}$$

$$\text{Logo } 5^{15} \equiv 3^5 \equiv -1 \pmod{61}$$

$$\text{Assim } 20^{15} = 4^{15} \cdot 5^{15} \equiv (-1)(-1) = 1 \pmod{61}$$

4. (2,0) Mostre que um número natural N na base 10 é divisível por 6 se, e somente se, a soma do algarismo da unidade com o quádruplo de cada um dos outros algarismos é divisível por 6.

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0$$

$$0 \leq a_i \leq 9$$

Queremos mostrar que $N \equiv 0 \pmod{6}$
 $\Rightarrow a_0 + 4(a_1 + \dots + a_n) \equiv 0 \pmod{6}$

$$10 \equiv 4 \pmod{6} \quad \text{Vale que } 10^k \equiv 4 \pmod{6} \quad \forall k \geq 1 \quad (\text{Prove por indução})$$

$$\text{Assim } N \equiv a_n 4 + a_{n-1} 4 + \dots + a_1 4 + a_0 \pmod{6}$$

$$\text{Logo } N \equiv 0 \pmod{6} \Leftrightarrow 4(a_n + \dots + a_1) + a_0 \equiv 0 \pmod{6}.$$

5. (2,0) A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa? Prove, se for verdadeira. Dê um contra-exemplo se for falsa.

Se p_k é o k -ésimo número primo positivo então $p_{n+1} \leq p_1 p_2 \dots p_n + 1$ para todo inteiro $n \geq 3$.

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7 \dots$$

Seja $n \geq 3$. A afirmação é verdadeira.
 Vamos demonstrar!

Seja $n \geq 3$ e $N = p_1 \dots p_n + 1$. Existe p primo tal que $p \mid N$. Logo $p \leq N$. Mas $p \neq p_j, j = 1, \dots, n$.

Logo $p > p_n \Rightarrow p \geq p_{n+1}$, pois p_{n+1} é o menor primo $\neq p_j, j = 1, \dots, n$.

Temos então que $p_{n+1} \leq p \leq p_1 \dots p_n + 1$.