PROVA 3

NOME:

NÚMERO USP:

Instruções

1. Esta prova contém 4 questões, cada uma delas valendo 2,5 pontos.
2. Justifique todas as suas respostas.
3. Não é permitido o uso de calculadoras.
4. Você tem 100 minutos para terminar a prova.

RASCUNHO

1. Seja n um inteiro maior do que 1 que não é divisível pelo quadrado de nenhum primo. Mostre que, para todo $a \in \mathbb{Z}$, tem-se

$$a^{\phi(n)+1} \equiv a \pmod{n},$$

em que ϕ denota a função de Euler.

2. Sejam m e n inteiros positivos tais que $\text{mdc}(m, n) = p^k$, onde p é um inteiro primo e k , um inteiro positivo. Mostre que

$$(p - 1)\phi(mn) = p\phi(m)\phi(n),$$

em que ϕ denota a função de Euler.

3. Seja p um inteiro primo.

(a) Mostre que p é o menor primo que divide $(p - 1)! + 1$.

(b) Determine $\text{mdc}((p - 1)! + 1, p!)$.

4. Encontre, em $\mathbb{Z}_{12}$, todas as soluções do sistema

$$\begin{cases} \bar{5}x + \bar{4}y = \bar{1} \\ \bar{3}x + \bar{6}y = \bar{3} \end{cases}$$