MAP0215- Cálculo Vetorial e Aplicações
MAT0205- Cálculo Diferencial e Integral III

Primeira Prova- Resolução

Dia: 24 de abril de 2018

Justifique todas as suas afirmações.

Questão 1

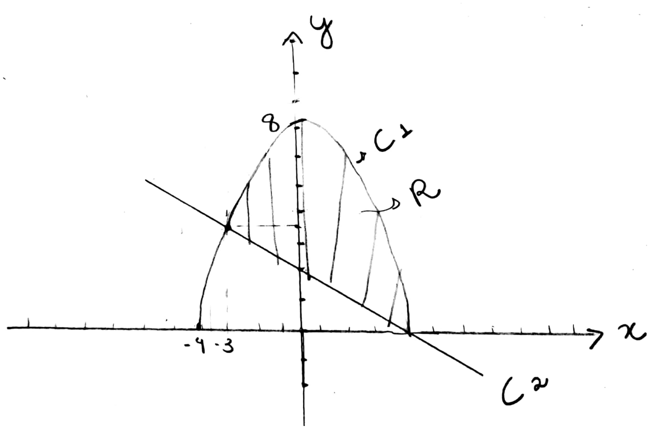
Calcular por integral dupla a área da região delimitada pelas curvas

$$x^2 + 2y = 16 \quad \text{e} \quad x + 2y = 4.$$

Resolução- Primeiramente vamos determinar a região de integração(R). Denotaremos por C_1 a curva $x^2 + 2y = 16$ e por C_2 a curva $x + 2y = 4$. Isolando $2y$ na equação de C_2 e substituindo o valor encontrado na equação de C_1, temos que

$$x^2 + 4 - x = 16 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

cujas raízes são $x_1 = -3$ e $x_2 = 4$. Substituindo os valores de x_1 e x_2 na equação de uma das curvas obtemos $y_1 = \dfrac{7}{2}$ e $y_2 = 0$.
Portanto, os pontos de interseção são $\left(-3, \dfrac{7}{2}\right)$ e $(4, 0)$.
Esboço da região R



Logo a região de integração pode ser descrita por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -3 \leq x \leq 4 \quad \text{e} \quad 2 - \frac{x}{2} \leq y \leq 8 - \frac{x^2}{2}\}.$$

Como queremos calcular a área entre as curvas, a função que iremos integrar é $f(x,y) = 1$ a qual é limitada e integrável em R.
Temos ainda que as funções $\phi_1, \phi_2 : [-3,4] \mapsto \mathbb{R}$ dadas por $\phi_1(x) = 2 - \dfrac{x}{2}$ e $\phi_2(x) = 8 - \dfrac{x^2}{2}$ são contínuas em $[-3,4]$; e como para todo $x \in [-3,4]$ existe a integral

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} = 8 - \frac{x^2}{2} - \left(2 - \frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{16 - x^2 - 4 + x}{2} = \frac{-x^2 + x + 12}{2} \end{aligned}$$

podemos aplicar o Teorema de Fubini, e obtemos

$$\begin{aligned} \iint_R 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-3}^{4} F(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-3}^{4} \frac{-x^2 + x + 12}{2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x\right]_{-3}^{4} \\ &= \frac{343}{12}. \end{aligned}$$

A área da região delimitada pelas curvas C_1 e C_2 é $\dfrac{343}{12}$ u.a.

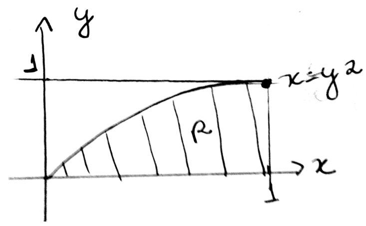
Questão 2

Calcule a integral dupla da função

$$f(x,y) = ye^{x^2}$$

na região $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq 1, \quad y^2 \leq x \leq 1\}$

Solução
Esboço de B



Note que para $x \in [0,1]$ fixo temos que $0 \leq y \leq \sqrt{x}$. Logo, a região de integração pode ser descrita da seguinte forma

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

Como $f(x,y) = ye^{x^2}$ é contínua em R compacto , segue que f é integrável, e como para todo $x \in [0,1]$ existe a integral

$$F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} ye^{x^2} \mathrm{d}y = e^{x^2} \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} x e^{x^2}$$

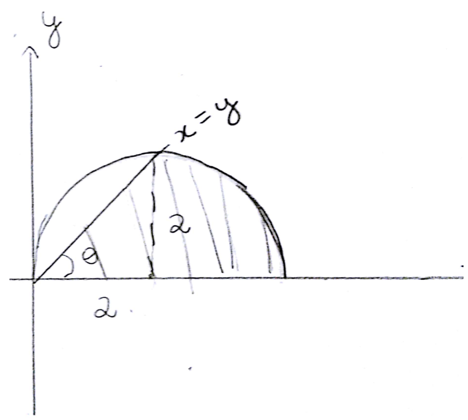
podemos aplicar o Teorema de Fubini, e obtemos

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2} x e^{x^2} = \frac{1}{4}(e-1).$$

Questão 3

Calcule a área da região delimitada pela curva $(x-2)^2+y^2=4$, a reta $y=0$ e a reta $y=x$.

Solução 1-Vamos primeiro determinar a região de integração.
Fazendo $y=x$ em $(x-2)^2+y^2=4$, temos que $x_1=0$ e $x_2=2$. Portanto, os pontos de interseção da reta $y=x$ e da circunferência $(x-2)^2+y^2=4$ são $(0,0)$ e $(2,2)$.



Para facilitar os cálculos, vamos escrever o domínio de integração em coordenadas polares, uu seja, faremos a seguinte mudança de varíavel

$$G:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$(x=r\cos\theta, y=r\sin\theta)$$

cujo Jacobiano é r.
Aplicando o Teorema da Mudança de Variáveis temos que

$$\iint_R 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{G^{-1}(R)} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

Vamos agora determinar o domínio de integração no plano $r\theta$
Considere o triângulo da figura acima, temos que

$$\tan\theta = \frac{2}{2} - 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Assim, efetuando uma varredura em R no sentido anti-horário a partir do eixo positivo x, vemos que $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$.
Em coordenadas polares, temos

$(x-2)^2+y^2 = 4 \iff (2-r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2 = 4 \iff r^2-4r\cos\theta = 0 \iff r = 4\cos\theta$

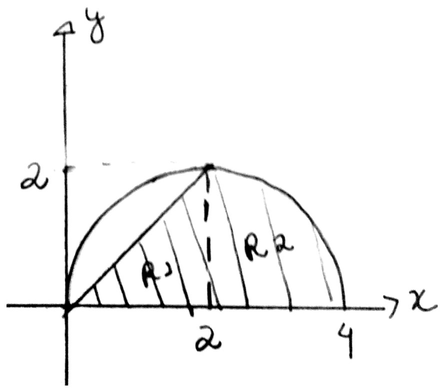
Logo, $0 \leq r \leq 4\cos\theta$

$$G^{-1}(R) = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 | \quad 0 \leq r \leq 4\cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}.$$

Note que a função $f(r,\theta) = r$ é contínua no retângulo $G^{-1}(R)$, logo podemos aplicar o Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{G^{-1}(R)} r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{4\cos\theta} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (8\cos^2\theta - 2)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\cos^2\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 4\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 2+\pi.
\end{aligned}$$

Solução 2
Considere o esboço de R



Temos que área da região R é a soma das áreas das regiões R_1 e R_2.

Vamos calcular primeiro a área de R_1. Temos que,

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x\}.$$

A função $f(x, y) = 1$ é contínua em R_1 compacto, logo limitada e integrável em R_1. Além disso, as função $\phi_(y) = x$ é contínua em $[0, 2]$ Aplicando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\iint_{R_1} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^x 1\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^2 x\mathrm{d}x = 2$$

Logo, a área de R_1 é 2.
Para calcular a área de R_2 vamos escrever essa região em coordenadas polares. Ou seja, faremos a seguinte mudança de varíavel

$$G : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$(x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$$

cujo Jacobiano é r.
Aplicando o Teorema da Mudança de Variáveis temos que

$$\iint_R 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{G^{-1}(R)} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

com $G^{-1}(R) = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}\}$
Note que a função $f(r, \theta) = r$ é contínua no retângulo $G^{-1}(R)$, logo podemos aplicar o Teorema de Fubini, obtendo

$$\iint\limits_{G^{-1}(R)} r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\mathrm{d}\theta = \pi$$

Logo, a área de R é $2 + \pi$.

Questão 4

Calcule a integral dupla da função

$$f(x,y) = \left(\frac{x-y}{x+y+2}\right)^2$$

na região B delimitada pelas retas de equações

$$x+y=1, x+y=-1, x-y=1, x-y=-1.$$

Solução
Como B é delimitada pelas retas $x+y=\pm 1$ e $x-y=\pm 1$, faremos uma mudança de variável tal que

$$u = x+y \quad \text{e} \quad v = x-y$$

ou seja ,

$$G : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$
$$(u,v) \mapsto (x = G_1(u,v) = \frac{u+v}{2}, y = G_2(u,v) = \frac{u-v}{2})$$

cujo Jacobiano é dado por

$$J_G = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial u} & \frac{\partial G_1}{\partial v} \\ \frac{\partial G_2}{\partial u} & \frac{\partial G_2}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Como G é uma aplicação linear com $|J_G| = \dfrac{1}{2} \neq 0$, podemos aplicar o Teorema da Mudança de Variáveis,

$$\iint_B \left(\frac{x-y}{x+y+2}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{G^{-1}(B)} \left(\frac{v^2}{u+2}\right)\frac{1}{2}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

As fronteiras de $G^{-1}(B)$ são $u=\pm 1$ e $v=\pm 1$, logo $G_{-1}(R)$ é o retângulo $[-1,1]\times[-1,1]$
Como $f(u,v) = \left(\dfrac{v^2}{u+2}\right)$ é contínua em $G^{-1}(B)$, podemos aplicar o Teorema de Fubini, assim

$$\iint_{G^{-1}(B)} \left(\frac{v^2}{u+2}\right)\frac{1}{2}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\frac{v^2}{u+2}\right)\frac{1}{2}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{2}{9}.$$