

Segunda Prova- Resolução

Dia: 05 de Julho de 2018

Justifique todas as suas afirmações.

Questão 1

- a) Calcule $\int_C y^3 dx - x^3 dy$ sendo C o círculo de raio 2 centrado na origem percorrido uma vez no sentido anti-horário.
- b) O campo vetorial $F(x, y) = (y^3, -x^3)$ é conservativo? Justifique.

Resolução

- a) *Alternativa 1*-Temos que

$$\int_C F \cdot d\vec{r} = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

onde $P(x, y) = y^3$ e $Q(x, y) = -x^3$ são as componentes de $F = (P, Q)$, as quais são de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Note que a curva C é fechada, simples e regular por partes. Assim, pelo Teorema de Green

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

onde D é o círculo de raio 2 centrado na origem.

Logo,

$$\int_C y^3 dx - x^3 dy = \iint_D (-3x^2 - 3y^2) dx dy$$

Usando coordenadas polares

$$x = \rho \cos \theta; y = \rho \sin \theta$$

cujo jacobiano é ρ

Segue que $D = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Aplicando a fórmula de mudança de variáveis e o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
\int_C y^3 dx - x^3 dy &= \iint_D (-3x^2 - 3y^2) dx dy \\
&= -3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 dr d\theta \\
&= -3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 d\theta \\
&= -3 \int_0^{2\pi} 4 d\theta \\
&= -24\pi
\end{aligned}$$

Alternativa 2 Uma parametrização que percorre C da maneira dada é:

$$r : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$r(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$$

Assim, usando a definição de integral de linha

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} F((2 \cos t, 2 \sin t)) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (8 \sin^3 t, -8 \cos^3 t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t) dt \\
&= -16 \int_0^{2\pi} (\sin^4 t + \cos^4 t) dt \\
&= -16 \left[\frac{1}{16} (12x + \sin(4x)) \right]_0^{2\pi} \\
&= -12(2\pi) = -24\pi
\end{aligned}$$

Obs-O cálculo da integral $\int_0^{2\pi} (\sin^4 t + \cos^4 t) dt$ é trabalhoso, pois envolve várias etapas de integração por partes, e utilização de identidades trigonométricas. Assim, a melhor maneira de resolver a questão é utilizando o Teorema Green (Alternativa 1), pois nesse caso as contas são bem mais simples.

- b) Se $\vec{F}$ fosse um campo conservativo em $\mathbb{R}^2$ então a integral $\int_C \vec{F} d\vec{r}$ seria zero, para qualquer curva fechada C contida em $\mathbb{R}^2$. Como a integral ao longo do círculo do item a) não é zero, concluímos que $\vec{F}$ não é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2$.

Questão 2

Calcule $\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ sendo

$$F(x, y, z) = (z^2, -3xy, x^3y^3)$$

e S é a porção do parabolóide $z = 5 - x^2 - y^2$ com $z \geq 1$, com normal apontando para cima.

Resolução

Alternativa 1 Como $z \geq 1$ temos que $1 \leq 5 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$.

Fazendo um esboço, vemos que a superfície S é um parabolóide que tem como curva fronteira sua intersecção com o plano $z = 1$, a qual se dá ao longo de uma circunferência de raio 2 e centro no ponto $(0, 0, 1)$.

Vemos que a superfície S é o gráfico da função $f : D \mapsto \mathbb{R}^3$ onde $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 4\}$ e $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$ é de classe C^1 em D . Esse tipo de superfície pode ser parametrizada por

$$\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$\sigma(u, v) = (u, v, 5 - u^2 - v^2)$$

que é injetiva, regular e de classe C^1 . Além disso, campo $\vec{F}$ é de classe C^1 em D . Logo, podemos aplicar o Teorema de Stokes, obtendo

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int_C \vec{F} \, d\vec{r}$$

C é a circunferência de raio 2 no plano $z=1$, percorrida no sentido anti-horário quando vista de cima, a qual delimita a superfície com orientação compátivel com a estipulada pela normal.

Uma parametrização para a curva C é:

$$r : (0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^3$$

$$r(t) = (2 \sin t, 2 \cos t, 1)$$

Calculemos a integral de linha sob C

$$\int_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) \, dt$$

No nosso caso, temos

$$r'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t, 0), \quad F(r(t)) = (1, -12 \cos t \sin t, 64 \cos^3 t \sin^3 t)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \int_0^{2\pi} (1, -12 \cos t \sin t, 64 \cos^3 t \sin^3 t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 \sin t - 24 \sin t \cos^2 t) \, dt \\ &= [8 \cos t + 2 \cos^3 t]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

Obs - Como o campo vetorial é simples, uma outra maneira de resolver esse exercício é utilizando a definição de integral de superfície. Dada pela fórmula

$$\iint_S \vec{G} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_D G(\sigma(u, v)) \cdot n \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| \, du \, dv$$

onde D é o domínio da parametrização σ . Neste caso, o campo G será o campo $\operatorname{rot} F$.

Questão 3

Calcule o fluxo do campo vetorial

$$F(x, y, z) = (\cos(z) + xy^2, xe^{-z}, \sin(y) + x^2z)$$

através da superfície do sólido limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$.

Resolução

Seja S a superfície formada pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o plano $z = 4$. Fazendo um esboço, vemos que S é uma superfície fechada e regular que é fronteira de um sólido $B \subset \mathbb{R}^3$ fechado.

Além disso, as componentes do campo F são de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Assim, aplicando o Teorema da Divergência de Gauss para a superfície S , temos

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_B \operatorname{div}(\vec{F}) \, dx \, dy \, dz$$

onde $\vec{n}$ é a normal exterior a superfície.

Temos que

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial(\cos(z) + xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(xe^{-z})}{\partial y} + \frac{\partial(\sin(y) + x^2z)}{\partial z} = y^2 + x^2$$

Para o cálculo da integral tripla do divergente utilizaremos coordenadas cilíndricas

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

cujo Jacobiano é r .

Temos que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq z \leq 4$, para acharmos a variação de r escrevemos $z = x^2 + y^2$ em coordenadas cilíndricas, e obtemos $r = \sqrt{z}$, logo $0 \leq r \leq \sqrt{z}$. Assim, $B = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq \sqrt{z}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 4\}$

Utilizando o a fórmula de mudança de varáveis e o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \iiint_B \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} r^2(r) dr dz d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{z}} dz d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^4 d\theta \\ &= \frac{16}{3} (2\pi) = \frac{32\pi}{3} \end{aligned}$$

Questão 4

Calcule o fluxo do campo vetorial $\vec{F}$ através da superfície aberta S , sendo

$$F(x, y, z) = (xy^2, yz^2 + (\sin(x))^2, 5 + zx^2)$$

e S dado por $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z \geq 0$, com $\vec{n}$ tendo componente z positiva.

Note que a superfície S é a semi-esfera superior de raio 2. Vamos aplicar o Teorema de Gauss, para isso precisamos fechar a superfície S com uma outra superfície S_1 , de modo que a união dessas superfícies seja fronteira de um sólido fechado $B \subset \mathbb{R}^3$

Seja S_1 o disco centrado na origem e de raio 2. Temos que $\bar{S} = S_1 \cup S$ é uma superfície fechada, orientável e regular, além disso as componentes de $\vec{F}$ são de classe C^1 . Aplicando o Teorema da Divergência de Gauss para a superfície $\bar{S}$ temos que

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_B \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz$$

Temos que

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(yz^2 + (\sin(x))^2)}{\partial y} + \frac{\partial(5 + zx^2)}{\partial z} = y^2 + x^2 + z^2$$

Para calcular a integral tripla do divergente utilizaremos coordenadas esféricas

$$x = r \cos \theta \sin \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \phi$$

cujo jacobiano é $r^2 \sin \phi$

Aplicando a fórmula da mudança de variáveis e o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned} \iiint_B \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^4 \sin \phi dr d\phi d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi \int_0^2 r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi (-\cos \phi)_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^5}{5} \right)_0^2 \\ &= \frac{64\pi}{5} \end{aligned}$$

Vamos calcular agora $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$

Para calcular o fluxo de F através de S_1 , podemos parametrizar S_1 utilizando coordenadas polares no plano:

$$\begin{aligned} \sigma : [0, 2] \times [0, 2\pi] &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ \sigma(u, v) &= (u \cos v, u \sin v, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= (\cos v, \sin v, 0), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (-u \sin v, u \cos v, 0) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= (0, 0, u), \quad \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| = u \end{aligned}$$

Agora, fazendo um esboço, vemos que estamos interessados na normal unitária a σ que aponta para baixo, isto é, com a última componente negativa, para ser compatível com a normal exterior a σ . Assim, tomamos:

$$n = \frac{-1}{u} (0, 0, u)$$

Pela definição de integral de superfície

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 F(\sigma(u, v)) \cdot n \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du dv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 -5u \, du dv \\ &= -10\pi \left(\frac{u^2}{2} \right)_0^2 \\ &= -20\pi\end{aligned}$$

Juntando tudo, temos que

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{64\pi}{5} + 20\pi = \frac{164\pi}{5}$$