

1) Demontre o teorema de Green para um disco: Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores C^1 e seja $\gamma(t) = (R \cos(t), R \sin(t))$, com $t \in [0, 2\pi]$ e $R > 0$. Mostre que

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \int_{int(\gamma)} (\partial Q / \partial x - \partial P / \partial y) dx dy, \text{ onde } \vec{F}(x, y) = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}$$

2) Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y) = (-y^3 \cdot \sin(x) / 3 + e^x) \vec{i} + (y^2 \cos(x) + 1 + y) \vec{j}$ e $\gamma(t) = (\sin(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$

3) Calcule $\int \int_{\sigma} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, onde $\vec{F}(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(-y \vec{i} + x \vec{j} + z^2 \vec{k})$ e σ é a superfície esférica de raio 1 centrada na origem e $\vec{n}$ é a normal exterior.

4) Mostre que $\vec{F}(x, y) = -6x / (3x^2 + y^2 - 1)^2 \vec{i} - 2y / (3x^2 + y^2 - 1)^2 \vec{j}$ definido em $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : 3x^2 + y^2 = 1\}$ satisfaz:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

para toda curva γ fechada, C^1 por partes, contida em Ω .

5) Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo C^2 e seja $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ uma curva fechada simples, C^1 por partes, tal que γ é bordo de duas superfícies parametrizadas σ_1 e σ_2 . Suponha ainda que $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \gamma$ e $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma_1, \sigma_2)$ é bordo de um compacto de Gauss B . Usando o teorema da divergência de Gauss, mostre que $\int \int_{\sigma_1} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS = \int \int_{\sigma_2} \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n}_2 dS$, onde $\vec{n}_1$ é a normal a σ_1 que aponta para fora de B e $\vec{n}_2$ é a normal a σ_2 que aponta para dentro de B .

6) Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo C^1 tal que $\text{div}(\vec{F}) \equiv 0$. Diga algumas consequências desse fato.