Nº USP:	Nome
---------	------

Exercício 1. (nota máxima 2,5) Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, definido axiomáticamente. a) Prove, usando as propriedades algébricas de $\mathbb{R}$, que, se $a > 0$, então o oposto de a é menor do que 0; b) use o resultado anterior para provar que, se $a < 0$ e $b > 0$, então $a \cdot b < 0$; c) use os dois resultados anteriores para provar que $1 > 0$.

Exercício 2. (nota máxima 2,5) a) Dê a definição de majorante de um subconjunto E de $\mathbb{R}$ e a definição de supremo de E . b) Prove, usando o axioma de continuidade, que um subconjunto não vazio E de $\mathbb{R}$, limitado superiormente, possui supremo. c) Enfim, determine o supremo do conjunto $C = \left\{ \frac{2n^2}{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ e diga se tal supremo é máximo.

Exercício 3. (nota máxima 2,5) 1) Dê a definição de função contínua em um ponto. 2) Considere $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Prove que f é descontínua em $x = 1$ e contínua em $x = 0$ (use a definição de função contínua e não use o conceito de limite).

Exercício 4. (nota máxima 2,5) Dê o enunciado e a demonstração do teorema de anulamento para as funções contínuas.

Exercício 5. (exercício facultativo - nota máxima 1) Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas dadas. Prove que a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

JUSTIFIQUE COM ATENÇÃO CADA PASSO DOS EXERCÍCIOS

MAT 206 - MAP 216 - Análise Real - 1º semestre de 2018

Docente: Prof. Dr. Pierluigi Benevieri

Prova P1 - 13.4.2018 – Prova B

Nº USP:	Nome
---------	------

Exercício 1. (nota máxima 2,5) Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, definido axiomáticamente. a) Prove, usando as propriedades algébricas de $\mathbb{R}$, que, se $a < 0$, então o oposto de a é maior do que 0; b) use o resultado anterior para provar que, se $a < 0$ e $b < 0$, então $a \cdot b > 0$; c) use os dois resultados anteriores para provar que $1 > 0$.

Exercício 2. (nota máxima 2,5) a) Dê a definição de minorante de um subconjunto E de $\mathbb{R}$ e a definição de infimo de E . b) Prove, usando o axioma de continuidade, que um subconjunto não vazio E de $\mathbb{R}$, limitado inferiormente, possui infimo. c) Enfim, determine o infimo do conjunto $C = \left\{ \frac{2n^2}{n^2 - 1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$ e diga se tal infimo é mínimo.

Exercício 3. (nota máxima 2,5) 1) Dê a definição de função contínua em um ponto. 2) Considere $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Prove que f é descontínua em $x = 1$ e contínua em $x = 0$ (use a definição de função contínua e não use o conceito de limite).

Exercício 4. (nota máxima 2,5) Dê o enunciado e a demonstração do teorema de anulamento para as funções contínuas.

Exercício 5. (exercício facultativo - nota máxima 1) Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas dadas. Prove que a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

JUSTIFIQUE COM ATENÇÃO CADA PASSO DOS EXERCÍCIOS

MAT 206 - MAP 216 - Análise Real - 1º semestre de 2018

Docente: Prof. Dr. Pierluigi Benevieri

Prova P1 - 13.4.2018 – Prova C

Nº USP:	Nome
---------	------

Exercício 1. (nota máxima 2,5) Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, definido axiomáticamente. a) Prove, usando as propriedades algébricas de $\mathbb{R}$, que, se $a > 0$, então o oposto de a é menor do que 0; b) use o resultado anterior para provar que, se $a < 0$ e $b > 0$, então $a \cdot b < 0$; c) use os dois resultados anteriores para provar que $1 > 0$.

Exercício 2. (nota máxima 2,5) a) Dê a definição de majorante de um subconjunto E de $\mathbb{R}$ e a definição de supremo de E . b) Prove, usando o axioma de continuidade, que um subconjunto não vazio E de $\mathbb{R}$, limitado superiormente, possui supremo. c) Enfim, determine o supremo do conjunto $C = \left\{ \frac{4n^3}{n^3 + 1}, n \in \mathbb{N} \right\}$ e diga se tal supremo é máximo.

Exercício 3. (nota máxima 2,5) 1) Dê a definição de função contínua em um ponto. 2) Considere $f : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Prove que f é descontínua em $x = -1$ e contínua em $x = 0$ (use a definição de função contínua e não use o conceito de limite).

Exercício 4. (nota máxima 2,5) Dê o enunciado e a demonstração do teorema de anulamento para as funções contínuas.

Exercício 5. (exercício facultativo - nota máxima 1) Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas dadas. Prove que a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

JUSTIFIQUE COM ATENÇÃO CADA PASSO DOS EXERCÍCIOS

MAT 206 - MAP 216 - Análise Real - 1º semestre de 2018

Docente: Prof. Dr. Pierluigi Benevieri

Prova P1 - 13.4.2018 – Prova D

Nº USP:	Nome
---------	------

Exercício 1. (nota máxima 2,5) Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, definido axiomáticamente. a) Prove, usando as propriedades algébricas de $\mathbb{R}$, que, se $a < 0$, então o oposto de a é maior do que 0; b) use o resultado anterior para provar que, se $a < 0$ e $b < 0$, então $a \cdot b > 0$; c) use os dois resultados anteriores para provar que $1 > 0$.

Exercício 2. (nota máxima 2,5) a) Dê a definição de minorante de um subconjunto E de $\mathbb{R}$ e a definição de infimo de E . b) Prove, usando o axioma de continuidade, que um subconjunto não vazio E de $\mathbb{R}$, limitado inferiormente, possui infimo. c) Enfim, determine o infimo do conjunto $C = \left\{ \frac{4n^3}{n^3 - 1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$ e diga se tal infimo é mínimo.

Exercício 3. (nota máxima 2,5) 1) Dê a definição de função contínua em um ponto. 2) Considere $f : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Prove que f é descontínua em $x = -1$ e contínua em $x = 0$ (use a definição de função contínua e não use o conceito de limite).

Exercício 4. (nota máxima 2,5) Dê o enunciado e a demonstração do teorema de anulamento para as funções contínuas.

Exercício 5. (exercício facultativo - nota máxima 1) Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas dadas. Prove que a função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

JUSTIFIQUE COM ATENÇÃO CADA PASSO DOS EXERCÍCIOS

Gabarito da primeira avaliação de Análise Real

(Realizada em 13 de abril de 2018)

Prova A

Exercício (1). Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, definido axiomáticamente. (a) Prove, usando as propriedades algébricas de $\mathbb{R}$, que, se $a > 0$, então o oposto de a é menor do que 0. (b) Use o resultado anterior para provar que, se $a < 0$ e $b > 0$, então $a \cdot b < 0$. (c) Use os dois resultados anteriores para provar que $1 > 0$.

Solução: (a) Temos, para cada $a \in \mathbb{R}$:

$$a > 0 \implies a + (-a) > 0 + (-a) \implies 0 > -a,$$

onde utilizamos o axioma da compatibilidade da soma com a relação de ordem de $\mathbb{R}$ (na primeira implicação) e os axiomas de oposto e elemento neutro de $\mathbb{R}$ (na segunda implicação). ■

(b) Note que, para $x \in \mathbb{R}$, temos $x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, donde $x \cdot 0 = 0$. Suponha então $a < 0$ e $b > 0$. Pelo item (a), temos que $-b < 0$ e portanto $a \cdot (-b) > 0 \cdot (-b) = 0$ (axioma da compatibilidade do produto com a relação de ordem de $\mathbb{R}$ e afirmação anterior). Pelo axioma da compatibilidade da soma com a relação de ordem de $\mathbb{R}$, temos que

$$a \cdot b + a \cdot (-b) > a \cdot b + 0 \implies a \cdot (b + (-b)) > a \cdot b \implies 0 = a \cdot 0 > a \cdot b,$$

como desejado. ■

(c) [Assumimos $1 \neq 0$.] Suponha, por absurdo, que $1 < 0$. Pelo item (a), obtemos $-1 > 0$, e o item (b) fornece então $-1 = 1 \cdot (-1) < 0$, uma contradição. ■

Exercício (2). (a) Dê a definição de majorante de um subconjunto E de $\mathbb{R}$ e a definição de supremo de E . (b) Prove, usando o axioma da continuidade, que um subconjunto não vazio E de $\mathbb{R}$, limitado superiormente, possui supremo. (c) Enfim, determine o supremo do conjunto $C = \left\{ \frac{2n^2}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ e diga se tal supremo é máximo.

Solução: (a) Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é um majorante de um subconjunto E de $\mathbb{R}$ se $x \geq y$ para todo $y \in E$. O supremo de um subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}$, denotado por $\sup E$, é o menor dos majorantes de E . ■

(b) Seja $E \subseteq \mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente. Como E é não vazio, tome $a_1 \in E$ e, sendo limitado superiormente, considere $b_1 \in \mathbb{R}$ um majorante de E . Se $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ for um majorante de E , defina $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$. Caso contrário, defina $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$. Repetindo esse processo, construímos uma sequência de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ satisfazendo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ e $b_n - a_n = 2(b_{n+1} - a_{n+1})$. Pelo axioma da continuidade, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Mostremos que $x = \sup E$.

Suponha que x não seja majorante de E , isto é, que exista $y \in E$ tal que $x < y$. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y \notin I_k$. Daí $y > b_k$, uma contradição, dado que todo b_n é, por construção, um majorante de E . Logo x é majorante de E .

Suponha que exista $c \in \mathbb{R}$, majorante de E , tal que $c < x$. Então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $c \notin I_j$. Daí $c < a_j$, uma contradição, dado que qualquer a_n ou é elemento de E ou não é majorante de E (e portanto c não pode ser majorante de E). ■

(c) Mostremos que $\sup C = 2$. Como $\frac{n^2}{n^2+1} < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vale que $\frac{2n^2}{n^2+1} < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e então 2 é majorante de C . Fixe $\varepsilon \in (0, 2)$. Queremos encontrar algum $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2k^2}{k^2+1} > 2 - \varepsilon \iff 2k^2 > 2k^2 - \varepsilon k^2 + 2 - \varepsilon \iff k > \sqrt{\frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Ora, a propriedade arquimediana garante a existência de tal k . Logo $2 - \varepsilon$ não é majorante de C e concluímos que 2 é o menor majorante de C , como desejado. Além disso, tal supremo não é máximo, dado que $\frac{2n^2}{n^2+1} < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Exercício (3). (a) Dê a definição de função contínua em um ponto. (b) Considere

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Prove que f é descontínua em $x = 1$ e contínua em $x = 0$ (use a definição de função contínua e não use o conceito de limite).

Solução: (a) Seja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua em um ponto $p \in D$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ sempre que $x \in D$ e $|x - p| < \delta$, ou equivalentemente: $f(x) \in (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon)$ sempre que $x \in (p - \delta, p + \delta) \cap D$. ■

(b) Para provar que f é descontínua em $x = 1$, tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e fixe $\delta > 0$ arbitrário. Como $1 \in \mathbb{Q}$, temos que $f(1) = 1$, donde $(f(1) - \varepsilon, f(1) + \varepsilon) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Tomando qualquer irracional x entre $1 - \delta$ e 1, teremos que $x \in (1 - \delta, 1 + \delta) \cap [0, 1] = (1 - \delta, 1]$ mas $f(x) = 0 \notin (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Logo f não pode ser contínua em $x = 1$.

Para provar que f é contínua em $x = 0$, fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário e tome $\delta = \varepsilon$. Note que $(f(0) - \varepsilon, f(0) + \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ e que $(0 - \delta, 0 + \delta) \cap [0, 1] = [0, \varepsilon)$. Para $x \in [0, \delta)$, temos duas possibilidades: (1) se $x \in \mathbb{Q}$, então $f(x) = x \in [0, \varepsilon) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$; (2) se $x \notin \mathbb{Q}$, então $f(x) = 0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Em ambos os casos, vale que $f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Pela arbitrariedade de ε , segue que f é contínua em $x = 0$. ■

Exercício (4). Dê o enunciado e a demonstração do teorema de anulamento para as funções contínuas.

Solução: Enunciado: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < 0 < f(b)$, e considere o conjunto $X = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Note que $a \in X$ e portanto X é não vazio. Além disso, $b \geq x$ para todo $x \in X$, donde X é limitado superiormente. Assim, existe $c = \sup X$. Mostraremos que $f(c) = 0$ por absurdo.

Se $f(c) < 0$, a continuidade de f nos fornece $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in (c - \delta_1, c + \delta_1)$. Então $c + \frac{\delta_1}{2} \in X$, uma contradição com o fato de c ser majorante de X .

Se $f(c) > 0$, a continuidade de f nos fornece $\delta_2 > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in (c - \delta_2, c + \delta_2)$. Daí $c - \frac{\delta_2}{2}$ é um majorante de X (se $c - \frac{\delta_2}{2} < y < c$, então $y \in (c - \delta_2, c + \delta_2)$ e portanto $y \notin X$), o que é uma contradição com o fato de c ser o menor majorante de X . ■

Exercício (5). Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas dadas. Prove que a função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Para $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$. Assim, para cada $x \in \mathbb{R}$, vale que $h(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$. Baseando-se no fato que soma, produto e composição de funções contínuas é uma função contínua, é suficiente mostrarmos que a função $x \mapsto |x|$ é contínua. Ora, tal fato segue imediatamente da seguinte consequência da desigualdade triangular: $||x| - |y|| \leq |x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. ■

Prova B

Exercício (1). Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, definido axiomáticamente. (a) Prove, usando as propriedades algébricas de $\mathbb{R}$, que, se $a < 0$, então o oposto de a é maior do que 0. (b) Use o resultado anterior para provar que, se $a < 0$ e $b < 0$, então $a \cdot b > 0$. (c) Use os dois resultados anteriores para provar que $1 > 0$.

Solução: (a) Temos, para cada $a \in \mathbb{R}$:

$$a < 0 \implies a + (-a) < 0 + (-a) \implies 0 < -a,$$

onde utilizamos o axioma da compatibilidade da soma com a relação de ordem de $\mathbb{R}$ (na primeira implicação) e os axiomas de oposto e elemento neutro de $\mathbb{R}$ (na segunda implicação). ■

(b) Note que, para $x \in \mathbb{R}$, temos $x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, donde $x \cdot 0 = 0$. Suponha então $a < 0$ e $b < 0$. Pelo item (a), temos que $-a > 0$ (dado que $a = -(-a)$) e portanto $(-a) \cdot b < (-a) \cdot 0 = 0$ (axioma da compatibilidade do produto com a relação de ordem de $\mathbb{R}$ e afirmação anterior). Pelo axioma da compatibilidade da soma com a relação de ordem de $\mathbb{R}$, temos que

$$a \cdot b + (-a) \cdot b < a \cdot b + 0 \implies (a + (-a)) \cdot b > a \cdot b \implies 0 = 0 \cdot b > a \cdot b,$$

como desejado. ■

(c) [Assumimos $1 \neq 0$.] Suponha, por absurdo, que $1 < 0$. Pelo item (a), obtemos $-1 > 0$, e o item (b) fornece então $-1 = 1 \cdot (-1) < 0$, uma contradição. ■

Exercício (2). (a) Dê a definição de minorante de um subconjunto E de $\mathbb{R}$ e a definição de ínfimo de E . (b) Prove, usando o axioma da continuidade, que um subconjunto não vazio E de $\mathbb{R}$, limitado inferiormente, possui ínfimo. (c) Enfim, determine o ínfimo do conjunto $C = \left\{ \frac{2n^2}{n^2-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$ e diga se tal ínfimo é mínimo.

Solução: (a) Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é um minorante de um subconjunto E de $\mathbb{R}$ se $x \leq y$ para todo $y \in E$. O ínfimo de um subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}$, denotado por $\inf E$, é o maior dos minorantes de E . ■

(b) Seja $E \subseteq \mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente. Como E é limitado inferiormente, tome a_1 um minorante de E e, sendo não vazio, tome $b_1 \in E$. Se $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ for um minorante de E , defina $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$. Caso contrário, defina $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$. Repetindo esse processo, construímos uma sequência de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ satisfazendo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ e $b_n - a_n = 2(b_{n+1} - a_{n+1})$. Pelo axioma da continuidade, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Mostremos que $x = \inf E$.

Suponha que x não seja minorante de E , isto é, que exista $y \in E$ tal que $y < x$. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y \notin I_k$. Daí $y < a_k$, uma contradição, dado que todo a_n é, por construção, um minorante de E . Logo x é minorante de E .

Suponha que exista $c \in \mathbb{R}$, minorante de E , tal que $x < c$. Então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $c \notin I_j$. Daí $c > b_j$, uma contradição, dado que qualquer b_n ou é elemento de E ou não é minorante de E (e portanto c não pode ser minorante de E). ■

(c) Mostremos que $\inf C = 2$. Como $\frac{n^2}{n^2-1} > 1$ para todo $n \geq 2$, vale que $\frac{2n^2}{n^2-1} > 2$ para todo $n \geq 2$, e então 2 é minorante de C . Fixe $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar algum $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2k^2}{k^2-1} < 2 + \varepsilon \iff 2k^2 < 2k^2 + \varepsilon k^2 - 2 - \varepsilon \iff k > \sqrt{\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Ora, a propriedade arquimediana garante a existência de tal k . Logo $2 + \varepsilon$ não é minorante de C e concluímos que 2 é o maior minorante de C , como desejado. Além disso, tal ínfimo não é mínimo, dado que $\frac{2n^2}{n^2-1} > 2$ para todo $n \geq 2$. ■

Exercício (3). (a) Dê a definição de função contínua em um ponto. (b) Considere

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Prove que f é descontínua em $x = 1$ e contínua em $x = 0$ (use a definição de função contínua e não use o conceito de limite).

Solução: (a) Seja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua em um ponto $p \in D$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ sempre que $x \in D$ e $|x - p| < \delta$, ou equivalentemente: $f(x) \in (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon)$ sempre que $x \in (p - \delta, p + \delta) \cap D$. ■

(b) Para provar que f é descontínua em $x = 1$, tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e fixe $\delta > 0$ arbitrário. Como $1 \in \mathbb{Q}$, temos que $f(1) = -1$, donde $(f(1) - \varepsilon, f(1) + \varepsilon) = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Tomando qualquer irracional x entre $1 - \delta$ e 1, teremos que $x \in (1 - \delta, 1 + \delta) \cap [0, 1] = (1 - \delta, 1]$ mas $f(x) = 0 \notin (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Logo f não pode ser contínua em $x = 1$.

Para provar que f é contínua em $x = 0$, fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário e tome $\delta = \varepsilon$. Note que $(f(0) - \varepsilon, f(0) + \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ e que $(0 - \delta, 0 + \delta) \cap [0, 1] = [0, \delta)$. Para $x \in [0, \delta)$, temos duas possibilidades: (1) se $x \in \mathbb{Q}$, então $f(x) = -x \in (-\varepsilon, 0] \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$; (2) se $x \notin \mathbb{Q}$, então $f(x) = 0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Em ambos os casos, vale que $f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Pela arbitrariedade de ε , segue que f é contínua em $x = 0$. ■

Exercício (4). Dê o enunciado e a demonstração do teorema de anulamento para as funções contínuas.

Solução: Enunciado: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < 0 < f(b)$, e considere o conjunto $X = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Note que $a \in X$ e portanto X é não vazio. Além disso, $b \geq x$ para todo $x \in X$, donde X é limitado superiormente. Assim, existe $c = \sup X$. Mostraremos que $f(c) = 0$ por absurdo.

Se $f(c) < 0$, a continuidade de f nos fornece $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in (c - \delta_1, c + \delta_1)$. Então $c + \frac{\delta_1}{2} \in X$, uma contradição com o fato de c ser majorante de X .

Se $f(c) > 0$, a continuidade de f nos fornece $\delta_2 > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in (c - \delta_2, c + \delta_2)$. Daí $c - \frac{\delta_2}{2}$ é um majorante de X (se $c - \frac{\delta_2}{2} < y < c$, então $y \in (c - \delta_2, c + \delta_2)$ e portanto $y \notin X$), o que é uma contradição com o fato de c ser o menor majorante de X . ■

Exercício (5). Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas dadas. Prove que a função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Para $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$. Assim, para cada $x \in \mathbb{R}$, vale que $h(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$. Baseando-se no fato que soma, produto e composição de funções contínuas é uma função contínua, é suficiente mostrarmos que a função $x \mapsto |x|$ é contínua. Ora, tal fato segue imediatamente da seguinte consequência da desigualdade triangular: $||x| - |y|| \leq |x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. ■

Prova C

Exercício (1). Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, definido axiomáticamente. (a) Prove, usando as propriedades algébricas de $\mathbb{R}$, que, se $a > 0$, então o oposto de a é menor do que 0. (b) Use o resultado anterior para provar que, se $a < 0$ e $b > 0$, então $a \cdot b < 0$. (c) Use os dois resultados anteriores para provar que $1 > 0$.

Solução: (a) Temos, para cada $a \in \mathbb{R}$:

$$a > 0 \implies a + (-a) > 0 + (-a) \implies 0 > -a,$$

onde utilizamos o axioma da compatibilidade da soma com a relação de ordem de $\mathbb{R}$ (na primeira implicação) e os axiomas de oposto e elemento neutro de $\mathbb{R}$ (na segunda implicação). ■

(b) Note que, para $x \in \mathbb{R}$, temos $x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, donde $x \cdot 0 = 0$. Suponha então $a < 0$ e $b > 0$. Pelo item (a), temos que $-b < 0$ e portanto $a \cdot (-b) > 0 \cdot (-b) = 0$ (axioma da compatibilidade do produto com a relação de ordem de $\mathbb{R}$ e afirmação anterior). Pelo axioma da compatibilidade da soma com a relação de ordem de $\mathbb{R}$, temos que

$$a \cdot b + a \cdot (-b) > a \cdot b + 0 \implies a \cdot (b + (-b)) > a \cdot b \implies 0 = a \cdot 0 > a \cdot b,$$

como desejado. ■

(c) [Assumimos $1 \neq 0$.] Suponha, por absurdo, que $1 < 0$. Pelo item (a), obtemos $-1 > 0$, e o item (b) fornece então $-1 = 1 \cdot (-1) < 0$, uma contradição. ■

Exercício (2). (a) Dê a definição de majorante de um subconjunto E de $\mathbb{R}$ e a definição de supremo de E . (b) Prove, usando o axioma da continuidade, que um subconjunto não vazio E de $\mathbb{R}$, limitado superiormente, possui supremo. (c) Enfim, determine o supremo do conjunto $C = \left\{ \frac{4n^3}{n^3+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ e diga se tal supremo é máximo.

Solução: (a) Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é um majorante de um subconjunto E de $\mathbb{R}$ se $x \geq y$ para todo $y \in E$. O supremo de um subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}$, denotado por $\sup E$, é o menor dos majorantes de E . ■

(b) Seja $E \subseteq \mathbb{R}$ não vazio e limitado superiormente. Como E é não vazio, tome $a_1 \in E$ e, sendo limitado superiormente, considere $b_1 \in \mathbb{R}$ um majorante de E . Se $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ for um majorante de E , defina $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$. Caso contrário, defina $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$. Repetindo esse processo, construímos uma sequência de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ satisfazendo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ e $b_n - a_n = 2(b_{n+1} - a_{n+1})$. Pelo axioma da continuidade, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Mostremos que $x = \sup E$.

Suponha que x não seja majorante de E , isto é, que exista $y \in E$ tal que $x < y$. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y \notin I_k$. Daí $y > b_k$, uma contradição, dado que todo b_n é, por construção, um majorante de E . Logo x é majorante de E .

Suponha que exista $c \in \mathbb{R}$, majorante de E , tal que $c < x$. Então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $c \notin I_j$. Daí $c < a_j$, uma contradição, dado que qualquer a_n ou é elemento de E ou não é majorante de E (e portanto c não pode ser majorante de E). ■

(c) Mostremos que $\sup C = 4$. Como $\frac{n^3}{n^3+1} < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vale que $\frac{4n^3}{n^3+1} < 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e então 4 é majorante de C . Fixe $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar algum $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{4k^3}{k^3+1} > 4 - \varepsilon \iff 4k^3 > 4k^3 - \varepsilon k^3 + 4 - \varepsilon \iff k > \sqrt[3]{\frac{4 - \varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Ora, a propriedade arquimediana garante a existência de tal k . Logo $4 - \varepsilon$ não é majorante de C e concluímos que 4 é o menor majorante de C , como desejado. Além disso, tal supremo não é máximo, dado que $\frac{4n^3}{n^3+1} < 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Exercício (3). (a) Dê a definição de função contínua em um ponto. (b) Considere

$$f: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Prove que f é descontínua em $x = -1$ e contínua em $x = 0$ (use a definição de função contínua e não use o conceito de limite).

Solução: (a) Seja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua em um ponto $p \in D$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ sempre que $x \in D$ e $|x - p| < \delta$, ou equivalentemente: $f(x) \in (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon)$ sempre que $x \in (p - \delta, p + \delta) \cap D$. ■

(b) Para provar que f é descontínua em $x = -1$, tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e fixe $\delta > 0$ arbitrário. Como $-1 \in \mathbb{Q}$, temos que $f(-1) = -1$, donde $(f(-1) - \varepsilon, f(-1) + \varepsilon) = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Tomando qualquer irracional x entre -1 e $-1 + \delta$, teremos que $x \in (-1 - \delta, -1 + \delta) \cap [-1, 0] = [-1, -1 + \delta)$ mas $f(x) = 0 \notin (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. Logo f não pode ser contínua em $x = -1$.

Para provar que f é contínua em $x = 0$, fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário e tome $\delta = \varepsilon$. Note que $(f(0) - \varepsilon, f(0) + \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ e que $(0 - \delta, 0 + \delta) \cap [-1, 0] = (-\varepsilon, 0]$. Para $x \in (-\varepsilon, 0]$, temos duas possibilidades: (1) se $x \in \mathbb{Q}$, então $f(x) = x \in (-\varepsilon, 0] \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$; (2) se $x \notin \mathbb{Q}$, então $f(x) = 0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Em ambos os casos, vale que $f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Pela arbitrariedade de ε , segue que f é contínua em $x = 0$. ■

Exercício (4). Dê o enunciado e a demonstração do teorema de anulamento para as funções contínuas.

Solução: Enunciado: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < 0 < f(b)$, e considere o conjunto $X = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Note que $a \in X$ e portanto X é não vazio. Além

disso, $b \geq x$ para todo $x \in X$, donde X é limitado superiormente. Assim, existe $c = \sup X$. Mostraremos que $f(c) = 0$ por absurdo.

Se $f(c) < 0$, a continuidade de f nos fornece $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in (c - \delta_1, c + \delta_1)$. Então $c + \frac{\delta_1}{2} \in X$, uma contradição com o fato de c ser majorante de X .

Se $f(c) > 0$, a continuidade de f nos fornece $\delta_2 > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in (c - \delta_2, c + \delta_2)$. Daí $c - \frac{\delta_2}{2}$ é um majorante de X (se $c - \frac{\delta_2}{2} < y < c$, então $y \in (c - \delta_2, c + \delta_2)$ e portanto $y \notin X$), o que é uma contradição com o fato de c ser o menor majorante de X . ■

Exercício (5). Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas dadas. Prove que a função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Para $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$. Assim, para cada $x \in \mathbb{R}$, vale que $h(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$. Baseando-se no fato que soma, produto e composição de funções contínuas é uma função contínua, é suficiente mostrarmos que a função $x \mapsto |x|$ é contínua. Ora, tal fato segue imediatamente da seguinte consequência da desigualdade triangular: $||x| - |y|| \leq |x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. ■

Prova D

Exercício (1). Considere o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, definido axiomáticamente. (a) Prove, usando as propriedades algébricas de $\mathbb{R}$, que, se $a > 0$, então o oposto de a é menor do que 0. (b) Use o resultado anterior para provar que, se $a < 0$ e $b < 0$, então $a \cdot b > 0$. (c) Use os dois resultados anteriores para provar que $1 > 0$.

Solução: (a) Temos, para cada $a \in \mathbb{R}$:

$$a < 0 \implies a + (-a) < 0 + (-a) \implies 0 < -a,$$

onde utilizamos o axioma da compatibilidade da soma com a relação de ordem de $\mathbb{R}$ (na primeira implicação) e os axiomas de oposto e elemento neutro de $\mathbb{R}$ (na segunda implicação). ■

(b) Note que, para $x \in \mathbb{R}$, temos $x \cdot 0 + 0 = x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$, donde $x \cdot 0 = 0$. Suponha então $a < 0$ e $b < 0$. Pelo item (a), temos que $-a > 0$ (dado que $a = -(-a)$) e portanto $(-a) \cdot b < (-a) \cdot 0 = 0$ (axioma da compatibilidade do produto com a relação de ordem de $\mathbb{R}$ e afirmação anterior). Pelo axioma da compatibilidade da soma com a relação de ordem de $\mathbb{R}$, temos que

$$a \cdot b + (-a) \cdot b < a \cdot b + 0 \implies (a + (-a)) \cdot b > a \cdot b \implies 0 = 0 \cdot b > a \cdot b,$$

como desejado. ■

(c) Assumimos $1 \neq 0$. Suponha, por absurdo, que $1 < 0$. Pelo item (a), obtemos $-1 > 0$, e o item (b) fornece então $-1 = 1 \cdot (-1) < 0$, uma contradição. ■

Exercício (2). (a) Dê a definição de minorante de um subconjunto E de $\mathbb{R}$ e a definição de ínfimo de E . (b) Prove, usando o axioma da continuidade, que um subconjunto não vazio E de $\mathbb{R}$, limitado inferiormente, possui ínfimo. (c) Enfim, determine o ínfimo do conjunto $C = \left\{ \frac{4n^3}{n^3-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$ e diga se tal ínfimo é mínimo.

Solução: (a) Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é um minorante de um subconjunto E de $\mathbb{R}$ se $x \leq y$ para todo $y \in E$. O ínfimo de um subconjunto $E \subseteq \mathbb{R}$, denotado por $\inf E$, é o maior dos minorantes de E . ■

(b) Seja $E \subseteq \mathbb{R}$ não vazio e limitado inferiormente. Como E é limitado inferiormente, tome a_1 um minorante de E e, sendo não vazio, tome $b_1 \in E$. Se $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ for um minorante de E , defina $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$. Caso contrário, defina $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$. Repetindo esse processo, construímos uma sequência de intervalos $I_n = [a_n, b_n]$ satisfazendo, para todo $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subseteq I_n$ e $b_n - a_n = 2(b_{n+1} - a_{n+1})$. Pelo axioma da continuidade, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\{x\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Mostremos que $x = \inf E$.

Suponha que x não seja minorante de E , isto é, que exista $y \in E$ tal que $y < x$. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $y \notin I_k$. Daí $y < a_k$, uma contradição, dado que todo a_n é, por construção, um minorante de E . Logo x é minorante de E .

Suponha que exista $c \in \mathbb{R}$, minorante de E , tal que $x < c$. Então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $c \notin I_j$. Daí $c > b_j$, uma contradição, dado que qualquer b_n ou é elemento de E ou não é minorante de E (e portanto c não pode ser minorante de E). ■

(c) Mostremos que $\inf C = 4$. Como $\frac{n^3}{n^3-1} > 1$ para todo $n \geq 2$, vale que $\frac{4n^3}{n^3-1} > 4$ para todo $n \geq 2$, e então 4 é minorante de C . Fixe $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar algum $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{4k^3}{k^3-1} < 4 + \varepsilon \iff 4k^3 < 4k^3 + \varepsilon k^3 - 4 - \varepsilon \iff k > \sqrt[3]{\frac{4 + \varepsilon}{\varepsilon}}.$$

Ora, a propriedade arquimediana garante a existência de tal k . Logo $4 + \varepsilon$ não é minorante de C e concluímos que 4 é o maior minorante de C , como desejado. Além disso, tal ínfimo não é mínimo, dado que $\frac{4n^3}{n^3-1} > 4$ para todo $n \geq 2$. ■

Exercício (3). (a) Dê a definição de função contínua em um ponto. (b) Considere

$$f: [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Prove que f é descontínua em $x = -1$ e contínua em $x = 0$ (use a definição de função contínua e não use o conceito de limite).

Solução: (a) Seja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua em um ponto $p \in D$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ sempre que $x \in D$ e $|x - p| < \delta$, ou equivalentemente: $f(x) \in (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon)$ sempre que $x \in (p - \delta, p + \delta) \cap D$. ■

(b) Para provar que f é descontínua em $x = -1$, tome $\varepsilon = \frac{1}{2}$ e fixe $\delta > 0$ arbitrário. Como $-1 \in \mathbb{Q}$, temos que $f(-1) = -(-1) = 1$, donde $(f(-1) - \varepsilon, f(-1) + \varepsilon) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Tomando qualquer irracional x entre -1 e $-1 + \delta$, teremos que $x \in (-1 - \delta, -1 + \delta) \cap [-1, 0] = [-1, -1 + \delta)$ mas $f(x) = 0 \notin (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Logo f não pode ser contínua em $x = -1$.

Para provar que f é contínua em $x = 0$, fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário e tome $\delta = \varepsilon$. Note que $(f(0) - \varepsilon, f(0) + \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ e que $(0 - \delta, 0 + \delta) \cap [-1, 0] = (-\varepsilon, 0]$. Para $x \in (-\varepsilon, 0]$, temos duas possibilidades: (1) se $x \in \mathbb{Q}$, então $f(x) = -x \in [0, \varepsilon) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$; (2) se $x \notin \mathbb{Q}$, então $f(x) = 0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Em ambos os casos, vale que $f(x) \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Pela arbitrariedade de ε , segue que f é contínua em $x = 0$. ■

Exercício (4). Dê o enunciado e a demonstração do teorema de anulamento para as funções contínuas.

Solução: Enunciado: Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < 0 < f(b)$, e considere o conjunto $X = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Note que $a \in X$ e portanto X é não vazio. Além disso, $b \geq x$ para todo $x \in X$, donde X é limitado superiormente. Assim, existe $c = \sup X$. Mostraremos que $f(c) = 0$ por absurdo.

Se $f(c) < 0$, a continuidade de f nos fornece $\delta_1 > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in (c - \delta_1, c + \delta_1)$. Então $c + \frac{\delta_1}{2} \in X$, uma contradição com o fato de c ser majorante de X .

Se $f(c) > 0$, a continuidade de f nos fornece $\delta_2 > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in (c - \delta_2, c + \delta_2)$. Daí $c - \frac{\delta_2}{2}$ é um majorante de X (se $c - \frac{\delta_2}{2} < y < c$, então $y \in (c - \delta_2, c + \delta_2)$ e portanto $y \notin X$), o que é uma contradição com o fato de c ser o menor majorante de X . ■

Exercício (5). Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas dadas. Prove que a função $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$, é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Para $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$. Assim, para cada $x \in \mathbb{R}$, vale que $h(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$. Baseando-se no fato que soma, produto e composição de funções contínuas é uma função contínua, é suficiente mostrarmos que a função $x \mapsto |x|$ é contínua. Ora, tal fato segue imediatamente da seguinte consequência da desigualdade triangular: $||x| - |y|| \leq |x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. ■