

Exercício 1. (nota máxima 3) Considere a função

$$F(x) = \int_x^{x+2} \frac{\operatorname{arctg} t}{t-1} dt.$$

a) Determine o domínio de F ; b) calcule os limites interessantes de F (*sugestão: use oportunamente os critérios de confronto dos limites*) c) diga porque F é derivável no seu domínio e calcule a derivada de F .

Em seguida observe que é complicado determinar completamente

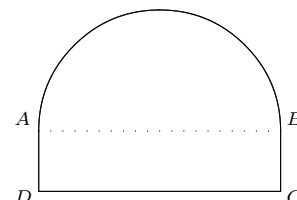
d) as regiões onde F é positiva, ou negativa,

e) os (possíveis) pontos de anulamento de F ,

f) os intervalos de crescimento ou decrescimento de F e os possíveis pontos de máximo e mínimo relativo.

Tente dar respostas pelo menos parciais aos pontos d, e, f acima e tente explicar quais são as dificuldades que impedem determinar completamente as respostas.

Exercício 2. (nota máxima 2). No desenho ao lado, o arco colocado em cima do retângulo ABCD é a semicircunferência de diâmetro igual à base do retângulo. Entre todas as figuras de perímetro fixado P , determine a medida dos lados que permitem obter a área máxima. (*Calculando o perímetro exclua, obviamente, o lado AB*) (Justifique cada passo do exercício.)



Exercício 3. (nota máxima 4) Faça a construção da função logaritmo e da função exponencial, provando algumas das propriedades que elas tem. Defina, inclusive, o número e e tente dar uma estimativa dele (por exemplo encontrando a e b tais que $a < e < b$).

Exercício 4. (nota máxima 2) Sejam I intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Suponha f integrável (*porém não necessariamente contínua*) em qualquer subintervalo de I . Fixado $a \in I$, considere

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Prove que F é contínua em todo ponto de I .

Gabarito da segunda avaliação de Análise Real

(Realizada em 21 de maio de 2018)

Prova A

Exercício (1). Considere a função

$$F(x) = \int_x^{x+2} \frac{\arctan(t)}{t-1} dt$$

(a) Determine o domínio de F ; (b) calcule os limites interessantes de F ; (c) diga porque F é derivável no seu domínio e calcule sua derivada.

Em seguida observe que é complicado determinar completamente (d) as regiões onde F é positiva ou negativa; (e) os (possíveis) pontos de anulamento de F ; (f) os intervalos de crescimento e decrescimento de F e os possíveis pontos e máximo e mínimo relativo.

Tente dar respostas pelo menos parciais aos pontos (d), (e) e (f) acima e tente explicar quais são as dificuldades que impedem determinar completamente as respostas.

Solução: (a) Definindo $g(t) = \frac{\arctan(t)}{t-1}$, temos que g não é integrável nas vizinhanças de $t_0 = 1$. Assim, o domínio D da função F é dado por $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 \notin [x, x+2]\}$. Mas $1 \notin [x, x+2]$ se, e só se, $x < -1$ ou $x > 1$. Então,

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x < -1 \text{ ou } x > 1\} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

(b) Mostremos primeiramente que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x) = 0$. Para isso, lembre que $|\arctan(t)| \leq \frac{\pi}{2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} |F(x)| &= \left| \int_x^{x+2} \frac{\arctan(t)}{t-1} dt \right| \leq \int_x^{x+2} \frac{|\arctan(t)|}{|t-1|} dt \\ &\leq \frac{\pi}{2} \int_x^{x+2} \frac{1}{|t-1|} dt = \frac{\pi}{2} \log \left(\frac{|x+1|}{|x-1|} \right) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \end{aligned}$$

como desejado.

Mostremos agora que $\lim_{x \rightarrow -1^-} F(x) = -\infty$ e que $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = +\infty$. Para isso, precisamos estudar a convergência das integrais impróprias $\int_{-1}^1 \frac{\arctan(t)}{t-1} dt$ e $\int_1^3 \frac{\arctan(t)}{t-1} dt$. Como a técnica utilizada nesse estudo é idêntica, escrevo aqui apenas os detalhes para a segunda integral. Fixe $\varepsilon > 0$ arbitrário (suficientemente pequeno, isto é, $\varepsilon \in (0, 2)$). Como a função $t \mapsto \arctan(t)$ é crescente, temos que $\arctan(t) \geq \arctan(1+\varepsilon)$ para todo $t \in [1+\varepsilon, 3]$. Daí

$$\int_{1+\varepsilon}^3 \frac{\arctan(t)}{t-1} dt \geq \arctan(1+\varepsilon) \int_{1+\varepsilon}^3 \frac{1}{t-1} dt = \arctan(1+\varepsilon) \log \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)$$

Como a desigualdade acima vale para todo $\varepsilon \in (0, 2)$, podemos fazer $\varepsilon \rightarrow 0^+$ e obter o limite $\arctan(1+\varepsilon) \log \left(\frac{2}{\varepsilon} \right) \rightarrow +\infty$, concluindo que $\int_1^3 \frac{\arctan(t)}{t-1} dt = +\infty$.

(c) Considere G uma primitiva de g , isto é, $G' = g$. Pelo teorema fundamental do cálculo, temos que G é derivável (lembre-se que g é contínua) e que $F(x) = G(x+2) - G(x)$. Assim F , sendo soma e composição de funções deriváveis, é derivável e vale, pela regra da cadeia, que

$$F'(x) = G'(x+2) - G'(x) = g(x+2) - g(x) = \frac{\arctan(x+2)}{x+1} - \frac{\arctan(x)}{x-1}.$$

(Discussão para (d), (e) e (f))

Como g é positiva em $(-\infty, 0)$ e em $(1, +\infty)$, temos que $F(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$. Além disso, como $\lim_{x \rightarrow -1^-} F(x) = -\infty$, o teorema do valor intermediário garante a existência de $x_0 \in (-2, -1)$ tal que $F(x_0) = 0$. Aí se encontra a primeira dificuldade: determinar x_0 tal que $\int_{x_0}^{x_0+2} \frac{\arctan(t)}{t-1} dt = 0$.

Outra dificuldade é estudar a monotonicidade de F : como determinar em quais subconjuntos de D vale que $F'(x) > 0$ (ou $F'(x) < 0$)? Note-se que não é fácil estudar os sinais de $F'(x) = \frac{\arctan(x+2)}{x+1} - \frac{\arctan(x)}{x-1}$. Para uma resposta parcial, observe que se $x \in (-2, -1)$ então $\frac{\arctan(x+2)}{x+1} < 0$ e $\frac{\arctan(x)}{x-1} > 0$, donde $F'(x) < 0$ e portanto F é decrescente no intervalo $(-2, -1)$. Para acrescentar à discussão, podemos observar que g é decrescente no intervalo $(1, +\infty)$, o que nos dá alguma evidência (pelo menos intuitiva) de que F também seja decrescente em $(1, +\infty)$, por mais que seja difícil argumentar que $F'(x) < 0$ em tal intervalo.

A terceira dificuldade é determinar os zeros de F' , candidatos a máximos e mínimos de F , dado que a equação

$$\frac{\arctan(x+2)}{x+1} = \frac{\arctan(x)}{x-1}$$

não é fácil (talvez seja impossível?) de ser resolvida algébrica e/ou analiticamente. Para uma resposta parcial, note-se que $F'(-3) > 0$ e $F'(-2) < 0$, daí existe $x_1 \in (-3, -2)$ tal que $F'(x_1) = 0$. Além disso, tal x_1 (se é que é único) é um forte candidato a ser ponto de máximo de F , já que temos algumas evidências de que $F'(x) > 0$ para $x < x_1$ e $F'(x) < 0$ para $x > x_1$. ■

Exercício (2). No desenho ao lado, o arco colocado em cima do retângulo ABCD é a semicircunferência de diâmetro igual à base do retângulo. Entre todas as figuras de perímetro fixado P , determine a medida dos lados que permitem obter a área máxima.

Solução: Se denotarmos por x o raio da semicircunferência, teremos que o perímetro da figura será $P = \pi x + 2x + 2a(x)$, onde $a(x) = \overline{AD} = \overline{BC}$. Assim, o comprimento dos lados AD e BC fica determinado pela função $a(x) = \frac{P-2x-\pi x}{2}$, cujo domínio é $I = (0, \frac{P}{2+\pi})$.

Por outro lado, a área A da figura é dada, para $x \in I$, por

$$A(x) = \frac{\pi x^2}{2} + 2xa(x) = \frac{\pi x^2}{2} + 2x \frac{P-2x-\pi x}{2} = -(2 + \frac{\pi}{2})x^2 + Px,$$

Temos que $A'(x) = -(4 + \pi)x + P$ e portanto $A'(x_0) = 0 \iff x_0 = \frac{P}{4+\pi}$ (note que x_0 de fato pertence a I). Note que A' é uma função decrescente, donde podemos concluir que $A'(x) > 0$

para $x < x_0$ e $A'(x) < 0$ para $x > x_0$. Assim, existe $\delta > 0$ tal que A é crescente em $(x_0 - \delta, x_0]$ e decrescente em $[x_0, x_0 + \delta)$, o que garante que x_0 é de fato um ponto de máximo para A .

Dessa forma, as medidas dos lados que permitem obter a área máxima são $\overline{CD} = 2x_0 = \frac{2P}{4+\pi}$ e $\overline{AD} = \overline{BC} = a(x_0) = \frac{P}{2} \left(1 - \frac{2+\pi}{4+\pi}\right)$, enquanto o arco AB medirá $\pi x_0 = \frac{\pi P}{4+\pi}$. ■

Exercício (3). Faça a construção da função logaritmo e da função exponencial, provando algumas das propriedades que elas têm. Defina, inclusive, o número e e tente dar uma estimativa para ele.

Solução: Definimos, para $x > 0$, $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$. Pelo teorema fundamental do cálculo, temos que $\log$ é derivável e sua derivada é $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x > 0$. Como $\frac{1}{x} > 0$ para $x > 0$, temos que $\log$ é estritamente crescente e portanto injetora. Note que, para $x, y \in (0, +\infty)$,

$$\log(xy) - \log(y) = \int_1^{xy} \frac{1}{t} dt - \int_1^y \frac{1}{t} dt = \int_y^{xy} \frac{1}{t} dt.$$

Fazendo $t = ys$, temos que $dt = yds$ e s percorre $[1, x]$ quando t percorre $[y, xy]$. Então

$$\log(xy) - \log(y) = \int_y^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{s} ds = \log(x).$$

Por indução, temos então que $\log(x^n) = n \log(x)$ para $x > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, fixado $t > 0$ e dado $M > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\log(t^n) = n \log(t) > M$ (lembre da propriedade arquimediana), e portanto $\log(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Analogamente, mostramos que $\log(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$.

Como $\log$ é uma função contínua, o teorema do valor intermediário permite-nos concluir que sua imagem é $\mathbb{R}$. Denotamos por e o único número real que satisfaz a equação $\log(x) = 1$. Observe que $\log(2) = \int_1^2 \frac{1}{t} dt < \int_1^2 dt = 1$ e que $\log(4) = 2 \log(2) = 2 > 1$, donde podemos concluir que $2 < e < 4$.

Como vimos, $\log$ é injetora e portanto inversível. Denotamos por $\exp$ sua função inversa, que chamamos de função exponencial, que fica definida em $\mathbb{R}$ e possui imagem $(0, \infty)$. Como $\log$ é derivável e possui derivada $x \mapsto \frac{1}{x}$, que nunca se anula, concluímos que $\exp$ é derivável e como $\log(\exp(x)) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$1 = \frac{d}{dx}(\log(\exp(x))) = \frac{1}{\exp(x)} \frac{d}{dx} \exp(x),$$

donde $\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, $\exp$ é estritamente crescente e podemos concluir que $\exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ e $\exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Temos diretamente pela definição de e que $\exp(1) = e$.

Além disso, para $x, y \in \mathbb{R}$, temos $\log(\exp(x) \exp(y)) = \log(\exp(x)) + \log(\exp(y)) = x + y$, donde $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$. Assim, obtemos a fórmula $\exp(n) = e^n$, $n \in \mathbb{N}$, por indução.

A lista de propriedades continua... ■

Exercício (4). Sejam I intervalo de $\mathbb{R}$ e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada. Suponha que f seja integrável em qualquer subintervalo de I . Fixado $a \in I$, considere

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt.$$

Prove que F é contínua em todo ponto de I .

Solução: Fixe $x_0 \in I$ e $\varepsilon > 0$. A integrabilidade de f nos permite concluir que f é limitada em I , existindo $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq M$ para todo $t \in I$. Dessa forma, para $x \in I$, vale que

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x f(t) \, dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t)| \, dt \right| \leq M|x - x_0|.$$

Assim, tome $\delta = \varepsilon/M$ e observe que, se $x \in I$ e $|x - x_0| < \delta$, então $|F(x) - F(x_0)| \leq M|x - x_0| < \varepsilon$, concluindo então que F é contínua em x_0 . Pela arbitrariedade de $x_0 \in I$, temos que F é contínua em I . ■