Prova 1 - Análise Real

Cristian Ortiz

1º Semestre - 2019

Questão 1. Seja $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos números algébricos. Prove que $\mathbb{A}$ é enumerável.

Questão 2. Enuncie e demonstre o Toerema de Bolzano-Weierstrass.

Questão 3. Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto não vazio e $y \in \mathbb{R}$ um ponto fixado. Defina

$$\mathrm{d}(y, A) := \inf \big\{ |y - a| \mid a \in A \big\}.$$

(a) Prove que $\mathrm{d}(y, A) = 0 \Leftrightarrow y \in \overline{A}$.

(b) Suponha que A é fechado. Mostre que existe um $a \in A$ tal que $\mathrm{d}(y, A) = |y - a|$.

Questão 4. Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita *localmente limitada* se para cada $x \in X$, existe um intervalo aberto $I_x \ni x$ tal que f é limitada em $I_x \cap X$. Prove que se X é compacto e f é localmente limitada, então f é limitada.

Questão 5 (Opcional). Sejam $K_1 \supset K_2 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$ uma sequência de compactos em $\mathbb{R}$ com cada $K_n \neq \varnothing$. Mostre que

$$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

é compacto e não vazio.