Prova 2 - Análise Real

Cristian Ortiz

1^o Semestre - 2019

Questão 1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Prove que f é uma função constante, se e somente se, $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Dê um exemplo mostrando que o anterior não é válido se o domínio não for um intervalo.

Questão 2. Enuncie e demonstre o Teorema Fundamental do Cálculo. Prove ainda que se g é uma função tal que $g' = f$, então

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = g(b) - g(a).$$

Questão 3. Seja $X \subset \mathbb{R}$ compacto e considere $\mathcal{B}(X)$ o conjunto das funções limitadas cuja o domínio é X. Prove que o subconjunto das funções contínuas $C(X)$ é fechado.

Questão 4. Seja $a \in \mathbb{R}$ e p_n o polinômio de Taylor de grau $n \in \mathbb{N}$ em torno de a de uma função f. Determine o maior intervalo $I \ni a$ o qual a sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para f.