

USP - Universidade de São Paulo
IME - Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada
Disciplina: MAP 0216/MAT 0206/MAP 5706
Professor: Rodrigo Bissacot
PROVA 1.0

Aluna(o):

Nº USP:

Data: 16.10.2020

OBSERVAÇÕES:

Boa prova!

(1) (2 pontos)

Considere o conjunto X de seqüências de naturais $[x_n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}]$

$$X = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_{n+1} \geq 2x_n + 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

Decida se X é ou não enumerável. Provando sua resposta.

(2) (2,5 pontos)

(a) Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos abertos e densos em $\mathbb{R}$.

Mostre que $A \cap B$ é aberto e denso em $\mathbb{R}$.

(b) Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos densos em $\mathbb{R}$.

Suponha que A é aberto. É ainda verdade que $A \cap B$ é denso em $\mathbb{R}$?

Prove sua resposta.

(c) Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos densos em $\mathbb{R}$.

É ainda verdade que $A \cap B$ é denso em $\mathbb{R}$?

Prove sua resposta.

(3) (1 ponto)

Fixados $x \leq y$ reais, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere os seguintes conjuntos:

$$A_n = \left(x - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right) = \{\alpha \in \mathbb{R} : x - \frac{1}{n} < \alpha < y + \frac{1}{n}\}.$$

$$B_n = \left[x - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right] = \{\alpha \in \mathbb{R} : x - \frac{1}{n} \leq \alpha \leq y + \frac{1}{n}\}.$$

$$\text{Mostre que } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = [x, y] = \{\alpha \in \mathbb{R} : x \leq \alpha \leq y\}.$$

(4) (1,5 pontos)

Sejam A e B conjuntos não-vazios e limitados de números reais positivos.

(a) Prove que $\inf A > 0$, ou dê contra-exemplo se esse fato for falso.

(b) Dado um número real α , definimos o conjunto

$$X_\alpha := \alpha + B = \{\alpha + x; x \in B\}.$$

Mostre que $\inf X_\alpha = \alpha + \inf B$.

(c) É verdade que $\inf(A.X_\alpha) = \alpha.\inf A + \inf A.\inf B$?

Se for verdade, prove!

Se for falso, dê contra-exemplo!

No caso de ser falso, qual é a relação verdadeira?

QUESTÃO EXTRA.

Sejam A , B e C conjuntos limitados de $\mathbb{R}$.

Defina $d_H(A, B) = \max \left\{ \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|, \sup_{x \in A, y \in B} |x - y| \right\}$.

Mostre que $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(B, C)$.