

USP - Universidade de São Paulo
IME - Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada
Disciplina: MAP 0216/MAT 0206/MAP 5706
Professor: Rodrigo Bissacot
PROVA 1.2

Aluna(o):

Nº USP:

Data: 16.10.2020

OBSERVAÇÕES:

Boa prova!

(1) (2 pontos)

Seja X o conjunto das sequências de números inteiros $[x_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}]$ que são não-crescentes a partir do centésimo elemento, ou seja,

$$X = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_{n+1} \leq x_n \text{ para todo } n \geq 100\}$$

Decida se X é ou não enumerável. Provando sua resposta.

(2) (2,5 pontos)

(a) Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos abertos e densos em $\mathbb{R}$. Mostre que $A \cap B$ é aberto e denso em $\mathbb{R}$.

(b) Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos abertos e densos em $\mathbb{R}$. É verdade que neste caso $A \cup B = \mathbb{R}$? Prove ou dê contra-exemplo.

(c) Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos densos em $\mathbb{R}$. É ainda verdade que $A \cap B$ é denso em $\mathbb{R}$? Prove sua resposta.

(3) (1 ponto)

Fixado x real, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere os seguintes conjuntos:

$$A_n = \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right) = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha < x + \frac{1}{n}\}.$$

$$B_n = \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right] = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \leq x + \frac{1}{n}\}.$$

Mostre que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = (-\infty, x] = \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \leq x\}.$

(4) (1,5 pontos)

Sejam A e B conjuntos não-vazios e limitados de números reais positivos.

(a) Prove que se A é fechado então $\sup A \in A$.

(b) É verdade que $0 \notin \overline{A}$ então $\inf A > 0$?

Se for verdade, prove!

Se for falso, dê contra-exemplo!

(c) É verdade que $A \subseteq B$ então $\partial A \subseteq \partial B$

Se for verdade, prove!

Se for falso, dê contra-exemplo!

QUESTÃO EXTRA.

Sejam A , B e C conjuntos limitados de $\mathbb{R}$.

Defina $d_H(A, B) = \max \left\{ \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|, \sup_{x \in A, y \in B} |x - y| \right\}$.

Mostre que $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(B, C)$.