

USP - Universidade de São Paulo
IME - Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada
Disciplina: MAP 0216/MAT 0206/MAP 5706
Professor: Rodrigo Bissacot
PROVA 1.4
Aluna(o): N° USP: Data:16.10.2020

OBSERVAÇÕES:

Boa prova!

(1) (2 pontos)

Seja X o conjunto das sequências de números naturais $[x_n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}]$ que são periódicas, ou seja,

$$X = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \exists p \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_{n+p} = x_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

Decida se X é ou não enumerável. Provando sua resposta.

(2) (2,5 pontos)

(a) Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto de $\mathbb{R}$ e α um número real. Definimos o conjunto:

$$X_\alpha := \alpha + A = \{\alpha + x; x \in A\}.$$

Mostre que se A é denso em $\mathbb{R}$ então X_α é denso em $\mathbb{R}$.

(b) Mostre que se A é aberto então X_α é aberto.

(c) Mostre que se A é limitado então X_α é limitado.

Mostre que $\inf X_\alpha = \alpha + \inf A$.

(3) (1 ponto)

(a) Fixados $x \leq 0 < 2 \leq y$ reais, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere os conjuntos:

$$A_n = \left(x + \frac{1}{n}, y - \frac{1}{n}\right] = \{\alpha \in \mathbb{R} : x + \frac{1}{n} < \alpha \leq y - \frac{1}{n}\}.$$

$$B_n = \left[x + \frac{1}{n}, y - \frac{1}{n}\right) = \{\alpha \in \mathbb{R} : x + \frac{1}{n} \leq \alpha < y - \frac{1}{n}\}.$$

$$\text{Mostre que } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = (x, y) = \{\alpha \in \mathbb{R} : x < \alpha < y\}.$$

(b) Se a condição $x \leq 0 < 2 \leq y$ for eliminada, o resultado continua verdadeiro? Se for verdade, prove!
Se for falso, dê contra-exemplo!

(4) (1,5 pontos)

Sejam A e B conjuntos não-vazios e limitados de números reais positivos.

(a) Prove que se A é aberto então $\sup A \notin A$.

(b) É verdade que $0 \in \overline{A}$ então $\inf A = 0$?

Se for verdade, prove!

Se for falso, dê contra-exemplo!

(c) É verdade que $\inf A \in \partial A$?

Se for verdade, prove!

Se for falso, dê contra-exemplo!

QUESTÃO EXTRA.

Sejam A , B e C conjuntos limitados de $\mathbb{R}$.

Defina $d_H(A, B) = \max \left\{ \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|, \sup_{x \in A, y \in B} |x - y| \right\}$.

Mostre que $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(B, C)$.