USP - Universidade de São Paulo
IME - Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada
Disciplina: MAP 0216/MAT 0206/MAP 5706
Professor: Rodrigo Bissacot
PROVA 2.1

Aluna(o): **N° USP:** **Data:20.11.2020**

OBSERVAÇÕES:

Boa prova!

(1) (3 pontos)
Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências limitadas de números reais.
Sejam $A = \limsup x_n$ e $B = \limsup y_n$.
Mostre que:

(a) $\liminf(-x_n) = -A$

(b) Suponha que $\lim x_n = x_0$. Mostre que $\limsup\,(x_n - y_n) \geq x_0 - B$.

(2) (2 pontos)
(a) Seja $X_\alpha := \{m + n.\alpha;\ m \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{Z}\}$ e α irracional.
Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas.
Suponha que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X_\alpha$. Mostre que $f = g$.

(b) Se α for racional, a implicação do item (a) ainda é verdade?
Prove ou dê contra-exemplo.

(c) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. É possível existir $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descontínua em todos os pontos tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X_\alpha$ com α irracional? Exiba g ou prove que é impossível.

(3) (2 pontos)
Sejam A e B conjuntos não-vazios e compactos de números reais.
Definindo $d(A, B) = \inf\{|a - b|; a \in A \text{ e } b \in B\}$. Mostre que:

(a) Prove que se $A \cap B = \emptyset$ então $d(A, B) > 0$.

(b) Prove que se $A \cap B = \emptyset$ então existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $d(A, B) = |a - b|$.

(c) Dê exemplo de A e B conjuntos não-vazios e fechados de números reais tais que $A \cap B = \emptyset$ e $d(A, B) = 0$.

QUESTÃO EXTRA.

Seja $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$.

Diremos que f tem a propriedade (U) no ponto $x_0 \in X$ quando:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tal que $f(x) < f(x_0)+\varepsilon$, para todo $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\cap X$.

(a) Prove que f tem a propriedade (U) no ponto $x_0 \in X$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X tal que $\lim x_n = x_0$ temos que $\limsup f(x_n) \leq f(x_0)$.

Faça um desenho de uma função com essa propriedade.

(b) Suponha que f tem a propriedade (U) em todo $x \in X$ e que X seja compacto. Mostre que $f(x)$ atinge seu máximo em algum ponto de X, ou seja, existe $x_0 \in X$ tal $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in X$.