USP - Universidade de São Paulo
IME - Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada
Disciplina: MAP 0216/MAT 0206/MAP 5706
Professor: Rodrigo Bissacot
PROVA 2.2
Aluna(o): **N° USP:** **Data:20.11.2020**

OBSERVAÇÕES:

(1) (3 pontos)
Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências limitadas de números positivos.
Considere os seguintes números $a = \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$, $b = \liminf\limits_{n\to+\infty} y_n$,
e $B = \limsup\limits_{n\to+\infty} y_n$.
Prove que:

(a) $\liminf\limits_{n\to+\infty}(x_n.y_n) \geq a.b$

(b) Suponha que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0 > 0$. Mostre que $\limsup\limits_{n\to+\infty}(x_n.y_n) = x_0.B$.

(2) (2 pontos)
(a) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas.
Suponha que $f(r) = g(r)$ para todo r racional. Mostre que $f = g$.

(b) Se no exercício anterior trocarmos o conjunto dos racionais pelos irracionais, ou seja, as funções f e g coincidem nos irracionais.
Ainda é possível provar a iguadade das duas funções?
Prove ou dê contra-exemplo.

(c) É possível existirem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descontínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$ tais que $f(r) = g(r)$ para todo r racional?
Exiba funções f e g satisfazendo essa condição ou prove que é impossível.

(3) (2 pontos)
Sejam A e B conjuntos não-vazios e compactos de números reais.
Definindo $d(A, B) = \inf\{|a - b|; a \in A \text{ e } b \in B\}$. Mostre que:

(a) Prove que se $A \cap B = \emptyset$ então $d(A, B) > 0$.

(b) Prove que se $A \cap B = \emptyset$ então existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $d(A, B) = |a - b|$.

(c) Dê exemplo de A e B conjuntos não-vazios e fechados de números reais tais que $A \cap B = \emptyset$ e $d(A, B) = 0$.

QUESTÃO EXTRA.

Seja $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$.

Diremos que f tem a propriedade (L) no ponto $x_0 \in X$ quando:

$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ tal que $f(x_0) - \varepsilon < f(x)$, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap X$.

(a) Prove que f tem a propriedade (L) no ponto $x_0 \in X$ se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X tal que $\lim x_n = x_0$ temos que $\liminf f(x_n) \geq f(x_0)$.

Faça um desenho de uma função com essa propriedade.

(b) Suponha que f tem a propriedade (L) em todo $x \in X$ e que X seja compacto. Mostre que $f(x)$ atinge seu mínimo em algum valor de X, ou seja, existe $x_0 \in X$ tal $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in X$.