USP - Universidade de São Paulo
IME - Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada
Disciplina: MAP 0216/MAT 0206/MAP 5706
Professor: Rodrigo Bissacot
PROVA 3.1

Aluna(o): **N° USP:** **Data:18.12.2020**

OBSERVAÇÕES:
VOCÊ SÓ PRECISA FAZER 7,0 PONTOS NA PROVA!!!!!

MAS CORRIGIREI TUDO QUE VOCÊ FIZER!!!

Boa prova!

(1) (2 pontos)
Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de reais positivos tal que
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ seja convergente. Prove que:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x_n}}{n}$ é convergente.

(b) se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de reais não nulos tal que $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} y_n > 0$.

Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{y_n}$ é convergente

(2) (2 pontos)
(a) Considere $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e definida por $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$.
Mostre que f não é uniformemente contínua.

(b) Considere agora um novo domínio, $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ e definida por $g(x) = \sin(\frac{1}{x})$ para todo $x \in [a, +\infty)$. Mostre que g é uniformemente contínua.

(3) (2 pontos)
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz.
Mostre que se $X \subseteq \mathbb{R}$ tem medida nula então $f(X)$ tem medida nula.

(4) (2 pontos) Considere um intervalo $[a,b]$ e duas funções $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitadas e integráveis tal que o conjunto $A=\{x\in[a,b]; f(x)\neq g(x)\}$ tem medida nula. Mostre que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

(5) (2 pontos)

(a) Exiba um intervalo $[a,b]$ e uma função limitada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)>0$ para uma quantidade infinita de pontos x em $[a,b]$ satisfazendo

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Comentário: Você precisa definir a função f e provar que a função é integrável e que a integral é nula.

(b) Seja $\mathcal{I}([a,b]) := \{f:[a,b]\to\mathbb{R}; \int_a^b |f(x)|dx < +\infty\}$, ou seja, $\mathcal{I}([a,b])$ é o espaço das funções de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ cujo módulo é integrável.
Seja $d_1:\mathcal{I}([a,b])\times\mathcal{I}([a,b])\to\mathbb{R}$ definida por:

$$d_1(f,g) := \int_a^b |f(x)-g(x)|dx.$$

A função d_1 é uma métrica em $\mathcal{I}([a,b])$?
Se sim, prove. Se não, justifique porque.