

USP - Universidade de São Paulo
IME - Instituto de Matemática e Estatística
Departamento de Matemática Aplicada
Disciplina: MAP 0216/MAT 0206/MAP 5706
Professor: Rodrigo Bissacot
PROVA 3.1

Aluna(o):

Nº USP:

Data:22.01.2022

OBSERVAÇÕES:

VOCÊ SÓ PRECISA FAZER 7,0 PONTOS NA PROVA!!!!

MAS CORRIGIREI TUDO QUE VOCÊ FIZER!!!

Entrega as 3h da manhã de sábado dia 23.01.2021.

Envio permitido até às 3:30 da manhã.

Horário de São Paulo.

Boa prova!

(1) (2 pontos)

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de reais positivos. Prove que:

(a) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n}.$

(b) Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$

(2) (2 pontos)

(a) Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções uniformemente contínuas e limitadas. Mostre que a função produto $f.g : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.

(b) Dê um exemplo de um conjunto X e duas funções $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente contínuas tais que a função produto $f.g : X \rightarrow \mathbb{R}$ **não** é uniformemente contínua. Prove que seu exemplo de fato tem essa propriedade.

(3) (2 pontos)

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que existe $x_0 \in [a, b]$ satisfazendo $f(x_0) \neq 0$. Mostre que $\int_a^b |f(x)| dx > 0$.

(4) (2 pontos)

Definição 1. Seja $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo fechado e seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, para cada partição $\mathcal{P} = \{t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$ definimos a variação de f referente a partição $\mathcal{P}$ por $V(f; \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|$.

Diremos que f é uma **função de variação limitada** quando o supremo das variações sobre todas as partições possíveis é finito, ou seja:

$$\sup_{\mathcal{P}} \{V(f; \mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ é partição de } [a, b]\} = V_a^b(f) < \infty$$

Quando f for de variação limitada o número real $V_a^b(f)$ é chamado de **variação de f no intervalo $[a, b]$** .

Seja $\mathcal{C}^1([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é derivável e } f' \text{ é contínua}\}$, mostramos em aula que toda função $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ é Lipschitz.

(a) Mostre que toda função é Lipschitz é de variação limitada.
Conclua que toda função $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ é de variação limitada.

(b) Mostre que se $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$ então

$$V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)| dx.$$

(5) (2 pontos)

(a) Seja $a \in X \cap X'_+$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ derivável à direita em a .

Mostre que se $f'_+(a) < 0$ então existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X \cap (a, a + \delta)$ então $f(a) > f(x)$.

(b) Enuncie e prove o resultado análogo para a derivada à esquerda.