2^a **prova de Análise Real - MAT0206**

1^o. semestre de 2021

Nome: ____

Disciplina: ____

Questões	**Nota**
Q_1	
Q_2	
Q_3	
Q_4	

- Esta é a prova da turma MAT0206. Por favor envie a resolução na área da disciplina no Moodle.
- Por favor, procure fazer uma prova organizada, escreva o enunciado e indique claramente as questões resolvidas . Justifique todas as suas afirmações.
- A prova deve ser enviada em um arquivo do tipo pdf, com o título: nome-do-aluno(a)-sigladadisciplina.
- O nome do (a) aluno (a) legível deve também estar na própria prova. Se possível, use uma cópia deste arquivo.
- Resolva questões totalizando, no máximo 10 pontos. Questões adicionais não serão consideradas.
- O prazo para entrega é até as 13h. Não haverá tempo adicional para digitalização e não serão aceitas provas com atraso.

Questão 1. (4 pontos) Dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é **contrativa** se existe uma constante $0 < C < 1$ talque

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n|,$$

para $n \in \mathbb{N}$
a)Mostre que toda sequência contrativa é de Cauchy (portanto convergente).
b) Mostre que a sequência definida por: $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = \frac{1}{5}(x_n^3 + 3)$ para $n \in \mathbb{N}$ é contrativa (Dica: Mostre antes que $\frac{1}{5}(x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2) < 1$). para $n \in \mathbb{N}$.
c) Sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência definida em b), mostre que $r = \lim_{n\to\infty} x_n$ é raiz da equação:$x^3 - 5x + 3$.

Questão 2. **(3 pontos)** Seja $f : A \to \mathbb{R}$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy de pontos de A.
a) Mostre que, se $f : A \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, então $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.
b) O resultado de ainda é verdadeiro se f é apenas contínua? Se sim, demonstre. Se não, dê contraexemplo.
c) Mostre que, se f é uniformemente contínua em (a, b), então ela pode ser estendida para uma função contínua definida em $[a, b]$.

Questão 3. **(3 pontos)** Dada a função: $f(x) = \begin{cases} |x|^3 \sin^2 \frac{1}{x} \text{ se } x \neq 0, \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$,

a) Mostre que f é derivável em $\mathbb{R}$.

b) Mostre que f' é contínua em $\mathbb{R}$.

Questão 4. **(2 pontos)** Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\, dt,$$

e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ sua inversa. Mostre que $g(0) = 1$ e $g'(x) = g(x)$.